הרצאה

של פעם שעברה.

היום ננסה להבין הלאה את המבנה של מעטפת תחתונות. נזכור על הסוף

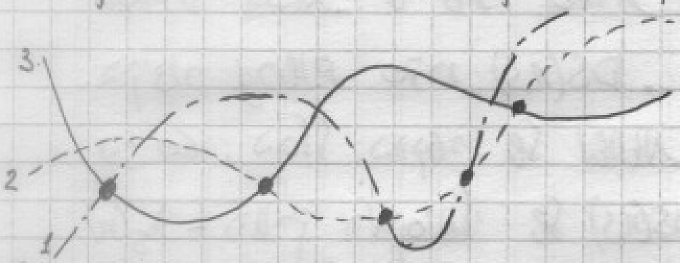
נתונות n פונק' $f_1(x),\dots,f_n(x)$ רציפות, מוגדרות על כל הישר וכל

זוג נחתכות ב-s נק' לכל היותר (s קבוע קטן)

המעטפת התחתונה/המינ' הנקודתי:

$$E(x)=\min_{1\le i\le n} f_i(x)$$

אין השקות בין הגרפים ואין 3 פונק' הנחתכות באותה נק'.



סדרת המעטפת התחתונה:

=> 1,3,2,1,2,3

הגרף של E מורכב מקטעים קשירים מקס' של הגרפים של ה-f_i.

בכל קטע כזה, f_i מסויים משיג את המעטפת, את $E(x)$.

בין הקטעים יש קודקודים - breakpoints.

המטרה היא לקבל חסם על מס' הקטעים המקס' במעטפת כתלות ב-n,s.

נסמן זאת בסימון $\lambda_s(n)$.

נתרגם את הבעיה לבעיה קומבינטורית ונשתגע עליה.

נגדיר את <u>סדרת המעטפת התחתונה</u>: רשימת האינדקסים של הפונק'

לפי הסדר שבו הן מופיעות על המעטפת משמאל לימין, ונסמן: $U(f_1,\dots,f_n)$

לסדרה כזאת יש כמה תכונות:

<u>אבחנה:</u>

ל-$U=U(f_1,\dots,f_n)$ יש התכונות:

1) מורכבת מ-n סמלים שונים לכל היותר. (בהבנה לצ"ר פונק' שלא מופיעה במעטפת).

2) אין בסדרה 2 איברים עוקבים שהם שווים, כלומר, לא יהיה ---aa---

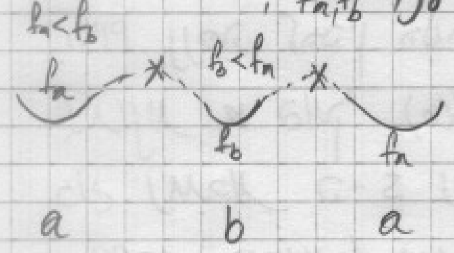
3) לא קיימים זוג אינדקסים שונים ($i\neq j$) המופיעים לסירוגין $s+2$ פעמים.

כלומר לא ייתכן שיהיו $s+1$ החלפות של: ---a---b---a---b---

בדוגמה המצוי"רת למעלה, $s=3$. יש לנו 3 החלפות בין 1 ל-3 למשל.

הסיבה לתבנית השלישית:

אם היה לנו גילוף כזה, אזי יש לנו f_a, f_b;



כלומר אם היו s+2 גילופים אז

היו s+1 מגעים, וזה בסתירה

שכל הפונק' נחתכות ב-s נק'

לכל היותר.

לסדרה כזאת יש שם: סדרת Davenport-Schinzel מסדר s של n סמלים.

בקיצור נרשום סדרת $DS(n,s)$. שני החבר'ה (שהיו מתמטיקאים) המציאו את המושג בשנות ה-60, בכלל בהקשר של משוואות דיפרנציאליות. אם כן:

$\lambda_s(n)$ = האורך המקסימלי של $DS(n,s)$.

כמה הערות לפני שנצלול לעומק:

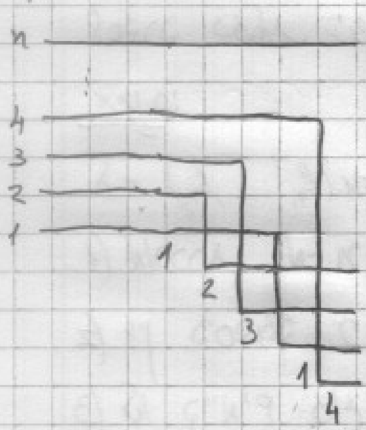
* הרדוקציה עובדת ב-2 הכיוונים. להפך, לכל סדרת $DS(n,s)$ u, קיימות n פונק' רציפות מוגדרות על כל הישר $f_1,\ldots,f_n$, כך שכל 2 מהן נחתכות בכל היותר s נק' כך ש-

$$U(f_1,\ldots,f_n)=u$$

<u>הוכחה:</u>

בלי הגבלת הכלליות, הסמלים הם $n,\ldots,1$ והסדר שלהם הוא כזה שההופעה השמאלית ביותר של i ב-u קודמת לזו של j $\Leftarrow$ $i<j$.

למשל, מהדוגמה קודם היה לנו 132123. אז נשנה את השמות בין 2 ל-3...



נלך לאורך הסדרה

$u_1,u_2,\ldots,u_m$

כאשר $u_1=1$, $u_2=2$ וכו'

את הפונק' שאנו מציירים להתנהג עפ"י

הסדרה.

כעת נותר רק להראות שכל זוג של פונק' לא "יחתך" יותר מ-s פעמים.

אז נסתכל על זוג פונק' f_i, f_j. חיתוכים קורים רק כאשר מורידים פונק' f_k אל המעטפת, ואז החיתוכים הם בין f_k לבין הפונק' האחרת.
לכן, f_i, f_j נחתכים רק כאשר מושכים למעטפת את f_i או את f_j.

$$i \quad j \quad j \quad i \quad i \quad i \quad j \quad i \quad j$$

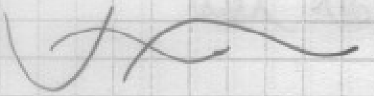
$f_i < f_j$

במילים אחרות, אם מושכים את j למטה כאשר j מתחת ל-i אז לא נגרום לנק' חיתוך. לכן, רק כאשר יש החלפה מקבלים חיתוך. התילוף המקס' של i ו-j הוא באורך s+2 לפי ההנחה, והוא מ"ב להתחיל ב-i. כש-i יורד למעטפת לא יהיה חיתוך עד לירידה של j.

הפונק' קצת "מכוערת", כלומר אין כאן משוואה יפה המתארת פונק' מתאימה אלא מקבל פשוט זיגזג, והבעיה של מציאת פונק' הנראית יפה לצורך ענ"ן זה היא בעיה קשה.

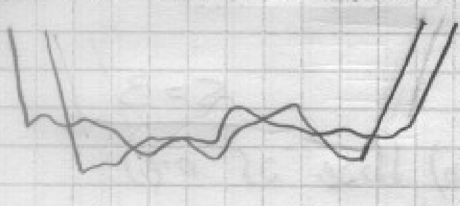
<u>הערה</u> (נוספת)

* אם $f_1,...,f_n$ פונק' מוגדרות חלקית כ"א על איזשהו קטע, הדרישות כל זוג נחתך ב-s נק' לכל היותר. אפשר להגדיר את סדרת המעטפת התחתונה ולהגביל מורידים שיכולים להופיע. אז, $u(f_1,...,f_n)$ היא סדרת $DS(n,s+2)$.

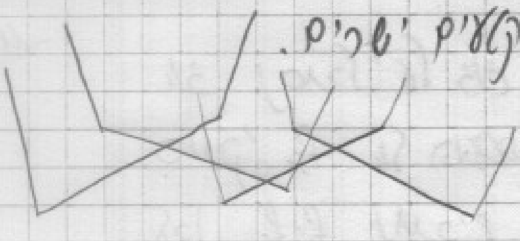


הסיבה היא שאם a מתחיל, ו-b מתחיל אחריו, אז אחרי שבו יש את a במעטפת התחתונה, הוא בהכרח חותך את b.

דרך אחרת: נהפוך כל פונק' לכזו שמוגדרת על כל הישר. נוסיף בקצוות 2 גרף, קו כמעט אנכי, בשיפוע מאוד גדול (לכל התוספות אותו שיפוע). ואז, נוספו לכל היותר עוד 2 נק' חיתוך.



מקרה מעניין נוסף הוא מקרה של קטעים ישרים.



אם נוסיף את התוספת כמו קודקוד,
אז נקבל סדרה של $DS(n,3)$.

הוכחה שאפשר להרחיב את זה - כלומר, אם במקום ישרים לוקחים נגיד פרבולות אלגבריות אז $s=2$ ואז אם מחליפים אותן מקבלים סדרת $DS(n,4)$.

הבה נחשב את ה-λ-ות.

נתחיל מ-$s=1$. כלומר <u>$\lambda_1(n)$:</u>

אם אין $a \dots b \dots a$ וגם אין 2 ברצף, אז כל סמל מופיע לכל היותר פעם אחת.

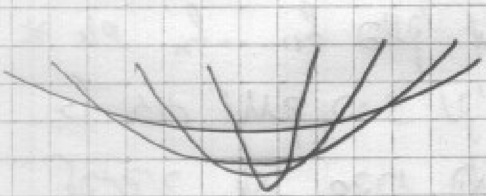
לכן $\lambda_1(n)=n$. פשוט $n,\dots,1,2$.

<u>$\lambda_2(n)=2n-1$</u>:

פרבולות.

<u>דרך 1</u>: יש $n-1$ פרבולות גדולות, ואחת שטוחה. ←

<u>דרך 2</u>: פרבולות מקוננות. כולן חוץ מאחת מופיעות פעמיים.



נסתכל על הסמל ה-n לפי המספר המינימלי, זה שהופעתו הראשונה משמאל הכי ימנית. הוא מופיע רק פעם אחת. אחרת היה מצב של $nxnx$.
כי כולם מופיעים לפני n, ואחרי אחד יופיע בין ה-n-ים וזו סתירה להנחה.
נניח שמופיע אחריו x מיד אחרי n, ומחליפים למחוק גם אותו ($\Leftarrow$ לא מקסימלי $\cancel{x}nx$) כי לא יתכן שהוא יהיה בהמשך שאחרת מקסימליים
מוחקים את $\underbrace{n}_{\text{ו-x אחריו}}$ ולכן קיבלנו סדרה $DS(n-1,2)$ ואיבדנו ≤ 2 איברים.

$$\lambda_2(n) \leq 2n-1 \quad \begin{cases} \lambda_2(n) \leq \lambda_2(n-1)+2 \\ \lambda_2(1) = 1 \end{cases}$$

<u>$s=3$</u>

נשים לב שבכלל $\lambda_s(n)$ חסום:

בנקודות
המחליפים ב-s נק' נחתכים למעשה

$$\lambda_s(n) \leq s\binom{n}{2}+1$$

בגלל השקילות לפונקציות.

נראה חסם גרוע $\lambda_3(n)=O(n\log n)$.

ניקח סדרה u: $DS(n,3)$ באורך מקס'.

בממוצע כל סמל מופיע $\frac{\lambda_3(n)}{n}$ פעמים. לכן קיים סמל x שמופיע לכל היותר $\frac{\lambda_3(n)}{n}$ פעמים.

נמחק אותו מהסדרה. בכל הופעה שלו, חוץ מהשמאלית ביותר והימנית ביותר, הוא לא בין 2 איברים זהים, כי אחרת יש ימר מדי חילופים.

אסור (סגירה) → $x \ldots yxy \ldots x$ הופעה ראשונה ואחרונה של x

לכן מחקנו $\geq \frac{\lambda_3(n)}{n}+2$ איברים וקיבלנו סדרה $D(n-1,3)$, ולכן:

$$\lambda_3(n) \leq \lambda_3(n-1)+\frac{\lambda_3(n)}{n}+2 \qquad (\lambda_3(1)=1)$$

$$\Rightarrow (n-1)\lambda_3(n) \leq n\lambda_3(n-1)+2n$$

נחלק ב- $n(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_3}{n} \leq \frac{\lambda_3(n+1)}{n-1}+\frac{2}{n-1}$$

$$\frac{\lambda_3}{n} \leq \frac{2}{n-1}+\frac{2}{n-2}+\ldots+\frac{2}{1}+\lambda_3(1)$$

$$\Rightarrow \lambda_3(n) \leq 2n\ln n + cn$$

כעת, ננסה חסם יותר טוב.

לשם כך, נוסיף עוד פרמטר. ניקח סדרה u: $DS(n,s)$, ונפרק אותה לבלוקים - תתי סדרות רציפות, שהאיברים בכל בלוק שונים זה מזה.

לשם, נעבור על הסדרה משמאל לימין (נשתמש במספור המיוחד) ונקלף כל פעם רצף מקסימלי יורד. למשל:

$1/21/3\ 1/4\ 3\ 2/3/4$

מס' הבלוקים בפירוק כזה הינו לכל היותר $(\leq)\ 2n-1$.

כי כאשר בלוק נגמר ואחר מתחיל למשל: $\ldots x/y \ldots$

אז או ש-x ההופעה האחרונה של הסמל או ש-y הראשונה. (אחרת הבלוק לא היה נגמר). כלומר כל פעם שנגמר בלוק זה אירוע, והאירועים הם כאלו

עדיין לא יצא כיוון כי אם אנחנו x מופיע לפני הסמל ה-y האחרון

שיש בדיוק $2n-1$ כאלו. אחרת: $x \ldots y\ xy \ldots x\ y\ x$

נסתכל על סדרות המורכבות מ-$\le m$ בלוקים ו-n סמלים.
נסמן את האורך המקסימלי שלהן ב-$\Psi(m,n)$. בסופו של דבר
נתעניין ב-$\lambda_3(n)=\Psi(2n-1,n)$.

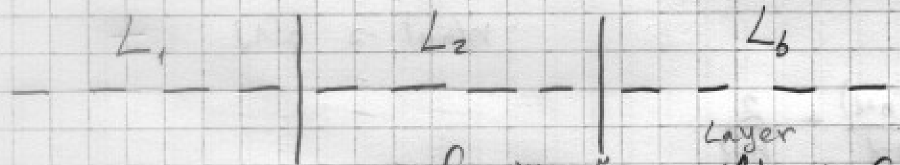
טענה:

נתונים m,n. ניקח פרמטר b שמחלק את m.
אז קיים פירוק של n מהצורה: $n=n_1+n_2+\dots+n_b+n^*$
כולם אי שליליים, ומתקיים:

$$\Psi(m,n)\le \Psi(b,n^*)+4m+4n^*+\sum_{i=1}^{b}\Psi\left(\frac{m}{b},n_i\right)$$

בעצם יהיו $\frac{m}{b}$ בלוקים...

נתחיל מסדרה u שמורכבת מ-m בלוקים, n סמלים, באורך מקסימלי של $\Psi(m,n)$



נפרק את u ל-b גושים, בכל $\frac{m}{b}$ בלוקים.

נסמן ב-n_i את מס' הסמלים הפנימיים המופיעים רק בגוש L_i, ונסמן ב-n^* מס' הסמלים החיצוניים (כלומר, המופיעים ביותר מגוש אחד) (לא כמות המופעים אלא כמה כאלו יש).

נתחיל מ-n_i הסמלים הפנימיים בגוש L_i. הגוש מורכב מ-$\frac{m}{b}$ בלוקים. בהם מופיעים n_i הסמלים הפנימיים וגם סמלים חיצוניים, שאותם נמחק.

נשים לב שאנו מוכנים למחוק את אותו x שמופיע משני צידי סימן חיצוני שמחקנו. מצב של x-חיצוני-x יתרחש רק במקום בו נגמר בלוק.

לכן, נמחק $\le \frac{m}{b}$ סמלים פנימיים.

אז, האורך של הסדרה המתקבלת הוא $\Psi(\frac{m}{b},n_i)$ ונוסיף את ה-$\frac{m}{b}$ שמחקנו

ולכן: תרומת הסמלים הפנימיים:

$$\sum_{i=1}^{b}\left[\overset{\text{פנימיים שנשארו}}{\Psi\left(\frac{m}{b},n_i\right)}+\overset{\text{פנימיים שמחקנו}}{\frac{m}{b}}\right] = m+\sum_{i=1}^{b}\Psi\left(\frac{m}{b},n_i\right)$$

עתה, לגבי הסמלים החיצוניים. צריך להבדיל בין 3 מקרים:

1) הופעת סמל חיצוני x בגוש L_i יכולה להיות הופעה ראשונה, אם x לא מופיע בגושים קודמים, אחרונה, אם לא מופיע בעוקבים או אמצעית.

אזי יש לנו או סמל מתחיל או סמל מסיים או סמל אמצעי.

אם יש לנו הגושים: $L_1, L_2, L_3 \ldots L_b$ ובכל אחד $p_1, p_2, \ldots p_b$ סמלים חיצוניים מתחילים בהתאמה. אזי $p_1+p_2+\ldots p_b=n^*$.

אם נסתכל על p_i הסמלים המתחילים ב-L_i, נמחק את כל הסמלים האחרים ונבצע מחיקת עוקבות של הסמלים שנותרו $\le \frac{m}{b}$ בגושים כאלו.

כי תהיה סדרה <u>מסדר 2</u>:

היות ו-x,y הם סמלים חיצוניים (יש לx עוד הופעה בהמשך), לא ייתכן מצב ב-L_i של xyxy. כי יהיה x מימין ל-L_i.

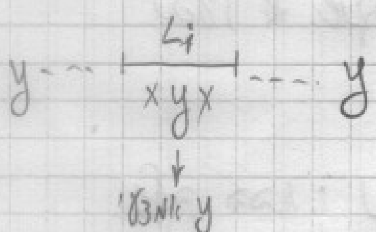
$$\Rightarrow \sum_i (2p_i-1+\frac{m}{b}) = 2n^*+m$$

אותו דבר נקבל גם עבור הסמלים החיצוניים המסיימים: $2n^*+m$.

כעת, נסתכל על הסמלים החיצוניים האמצעיים.

מוחקים הכל חוץ מהסמלים החיצוניים האמצעיים. כמו קודם אולי נאלצים לבצע $\frac{m}{b}\cdot b$ הופעות של סמלים אלו.

נשים לב כי סדרה של n^* סמלים, בכל גוש <u>אין חזרות</u> של הסמלים הללו, ולכן כל גוש מתנהג כבלוק $\leftarrow \psi(b,n^*)+m$.



היות ו-y אמצעי אז יש y בגוש משמאל ויש y בגוש מימין וזו סתירה.

במילים אחרות, עבור סמלים חיצוניים אמצעיים יורדים אפילו <u>לסדרה מסדר 1</u>.

אק"ו. כעת, הרעיון הוא שיש b שמחלק את n ל- n^* + $n=n_1+n_2+\ldots+n_b+n^*$

אנו נבנה באינדוקציה את $\psi(m,n)$, ע"י נסיונות לחסום את $\psi(b,n^*)$.

נתחיל מ- $b=2$: $\psi(2,n^*)\le 2n^*$ - 2 בלוקים שבאף אחד מהם הסמלים לא חוזרים על עצמם

לכן:

$$\psi(m,n)\le 2n^*+4m+4n^*+\psi(\frac{m}{2},n_1)+\psi(\frac{m}{2},n_2)$$

מסתבר שזו בדיוק הנוסחה המיוצרת $4m\log m+6n$ (ניתן להראות באינדוקציה)
(מ-Divide & Conquer?)

אם כך, קבלנו

$$\Psi_1(m,n) \le 4m\log m + 6n$$

כעת, ניקח $b=\frac{m}{\log m}$.

$$\Rightarrow \Psi(b,n^*) \le \Psi_1(b,n^*)$$

$$4b\log b + 6n^* = 4\frac{m}{\cancel{\log m}}\cancel{\log b} + 6n^* = 4m + 6n^*$$

$$\Rightarrow \Psi(m,n) \le 8m + 10n^* + \sum_{i=1}^{m/\log m} \Psi(\log m, n_i)$$

אם לרגע נעלם מהתלות ב-n_i ונסתכל רק על התלות ב-m. זה קצת רמאות
אבל לאינדוקציה זה עובד:

$$\Psi(m) \le \frac{m}{\log m}\cdot \underbrace{\Psi(\log m)}_{\left(\frac{\log m}{\log\log m}\Psi(\log\log m) + 8\log m\right)} + 8m$$

$$\Rightarrow \Psi(m) \le \frac{m}{\log\log m}\Psi(\log\log m) + 16m$$

נפעיל את זה k פעמים ונקבל:

$$\frac{m}{\log^{(k)} m}\Psi(\log^{(k)} m) + 8km$$

נפעיל עד שנקבל $k=\log^* m$:

$$\Psi_2(m,n) \le 8m\log^* m + 10n$$

שלב הבא: נבחר $b=\frac{m}{\log^* m}$ ואז:

$$\Psi(b,n^*) \le \Psi_2(b,n^*)$$

ושוב נקבל $10n^*$, וה-$\log^*$ יתבטל ונקבל $8m+10n^*$

$$\Rightarrow \Psi(m,n) \le 12m + 14n^* + \sum_{i=1}^{m/\log^* m} \Psi(\log^* m, n_i)$$

עכשיו ת"בים נדבר מעט על פונק' אקרמן (וההופכית שלה).

פונק' אקרמן

הסיפור הוא שבמקום לכתוב מספר על גליה, הכי גדול שיכולים, פשוט נכתוב אלג' המגיע למספר זה.

נסמן $A_k(n)$. ההגדרה היא:

$$A_1(n)=2n \quad , \quad A_k(1)=2$$

$$A_k(n)=A_{k-1}^{(n)}(1)=A_{k-1}\circ A_{k-1}\cdots\circ A_{k-1}$$ אז נגיד מפעילים n פעמים

$$A_k(n)=A_{k-1}(A_k(n-1))$$: שים לב שלכל $n\geq 2$

$$A_1(n)=2n$$

$$A_2(n)=2^n$$

$$A_3(n)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n \text{ פעמים}}=2^{A_3(n-1)}$$

$A_n(n)=A(n)$ ואלגוריתם

פונק' אקרמן ההפוכה:

$$\alpha_k(n)=\{\text{מס' הפעמים שהפעלת } \alpha_{k-1} \text{ על } n \text{ נותנת } 1\}$$

כלומר:

$$\underbrace{\alpha_{k-1}(\alpha_{k-1}(\ldots(\alpha_{k-1}(n))))}_{j \text{ פעמים}}=1 \iff \alpha_k(n)=j$$

$$\alpha_1(n)=\frac{n}{2} \quad , \quad \alpha_2(n)=\log n \quad , \quad \alpha_3(n)=\log^*(n)$$

אך אם נחזור לעניננו:

$$\Rightarrow \quad \Psi_k(m,n)\leq(4k-4)m\alpha_k(m)+(4k-2)n$$

$$k=1,2,\ldots$$

נשים לב שלומר ש- $\alpha(n)$ היא ההפכי של $A(k)$ זה כמו:

$$A_j(j)=A(j)\approx n \iff \alpha(n)=j$$

ניקח $k=\alpha(m)+1$ כי:

$$j=\alpha_{\alpha(m)}(m)=\alpha(m)$$

$$j\sim\alpha(m) \Leftarrow A_{\alpha(m)}(j)=m$$

משוכנע ש- $\alpha_{\alpha(m)+1}(m)=$קבוע (מינה זוכר שהקבוע הוא 4).

$$A_{\alpha(m)+1}(4)\sim m \quad \rightarrow \quad A_{\alpha(m)}(\underbrace{A_{\alpha(m)+1}(3)}_{>\alpha(m)})>m$$

ולכן, מגיעים ל-

$$\Psi(m,n) \le C(m+n)\alpha(m)$$

ונחזור ל-λ_3 המקורי:

$$\Rightarrow \lambda_3(n) = \Psi(2n-1,n) \le Cn\alpha(2n-1)$$

ניתן לומר כי $\alpha(2n-1)\le\alpha(n)+1$ וזהו החסם:

$$\lambda_3(n) = O(n\alpha(n))$$

בשבוע הבא נטפל גם בחסם התחתון. נוכיח שבעצם $\lambda_3(n)=\Theta(n\alpha(n))$

$\lambda_4(n)=\Theta(n\cdot 2^{\alpha(n)})$

מעל $s=4$, יש תוצאות שונות עבור s זוגי ואי-זוגי:

$$\lambda_{2t}(n) = n\cdot 2^{\frac{\alpha^t(n)}{t!} + \text{איברים קטנים יותר}}$$

כאשר האיברים הקטנים יותר רק בחסם העליון.

$$\lambda_{2t+1}(n) = n\cdot \alpha(n)^{\frac{\alpha^t(n)}{t!}+\dots}$$

$n\cdot 2^{\frac{\alpha^t(n)}{t!}\log(\alpha(n))}$ - חסם עליון

אחת התוצאות המפתיעות היא שאפשר לבנות n קטעים ישרים במישור כך שהמעטפת התחתונה שלהם תהיה מורכבת מ-$\Omega(n\alpha(n))$ תתי קטעים. שזה סוג של הופעות בפונק' אקרמן בטבע, בניגוד למה שמופיע באלג' של union-find ששם מעורבת פונק' אקרמן.

פרטים נוספים על ההוכחה... בספר של מיכה על הסדרות האלו.