לשם כך, באה למה, שלא נוכיח, הנקראת Exponential decay Lemma

המשולשים המקוריים של ה-cutting הראשון עם $t_\Delta \ge t$ הוא $O(r^2\cdot 2^{-t})$ בהסתב' גבוהה.

זה הופך את הסכום המפורש של כמות המשולשים החדשים למשהו כזה:

$$O(r^2)+\sum_{t_\Delta>1} t_\Delta^2\log^2 t_\Delta \to \sum_{t=1}^{\infty} t^2\log^2 t\cdot \underset{t_\Delta\ge t \text{ עם}}{\#\text{משולשים}} \sim r^2\cdot\sum 2^{-t}\cdot t^2\log^2 t = O(r^2)$$

הסיפור שעשינו כאן ב-2 שלבים, נכון ~~לא~~ לא רק למשולשים, והוא נכון גם במימדים יותר גבוהים

<u>הרצאה</u>

פעם שעברה, התחלנו לדבר על cuttings.

הייתה קבוצה של L ישרים במישור.

$n>r$ - פרמטר.

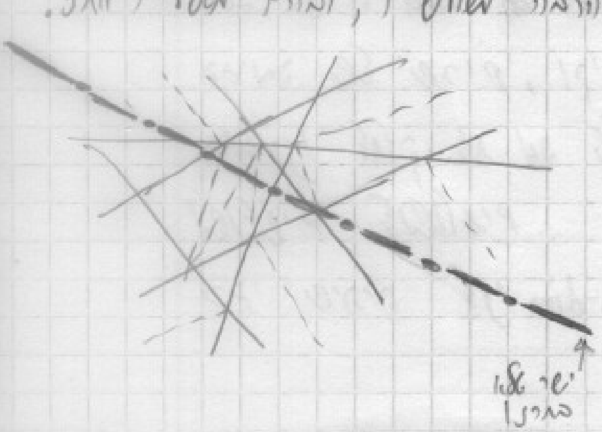
$\frac{1}{r}$-cutting = היה חלוקה של המישור ל- $O(r^2)$ משולשים.

כל ומש crossed (נחתך) ע"י $\le \frac{n}{r}$ ישרים של L.
interior intersected

אבל מה לגבי הבנייה של זה? צריך לעשות זאת בזהירות, וע"י אלג' רנדומי ניתן לבנות בזמן (בתוחלת) של $O(nr)$.

כמו אז יותר מה שעושים - לוקחים $O(r)$ "ישרים", בונים משולשים, ולכל משולש צריכים למצוא כמה ישרים חותכים אותו.

אם יש לנו מזל, כל משולש נחתך ע"י $\frac{n}{r}$ משולשים, ואז סיימנו. אבל "יכול" שיהיו יותר מדי משולשים "כבדים", שנחתכים ע"י הרבה משולשים, ובהם מטפלים וכו'.



מוסיפים ישר, (שלו בורוד), מסתכלים על ה-zone שלו. כמות המשולשים שהוא יוצר פרופ' ל-zone שלו, שזה $O(r)$ משולשים.

ועכשיו יכולים למצוא אותם (את המשולשים) בזמן $O(n)$ ע"י tracing של ה-zone,
כמו שכבר עשינו בעבר?

⇐ #line-triangle crossings $= O(nr)$

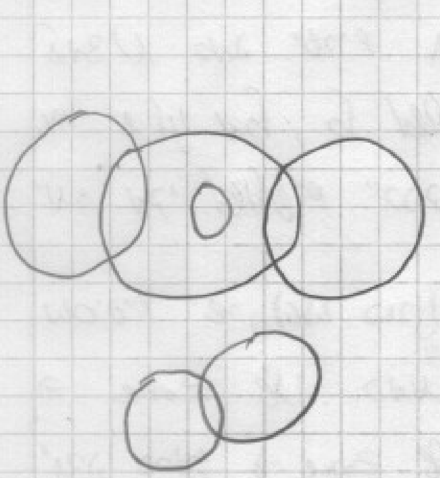
⇐ בממוצע, כל משולש נחצה ע"י $O(\frac{n}{r})$ ישרים (מיצוע על r^2 משולשים).

לכן, מוצאים לכל משולש, את (כמות) של ה-crossing lines ב-$O(nr)$ זמן.

ברגע שמצאנו את כל ~~[illegible]~~ כמויות הישרים שחוצים כל משולש, מסתכלים
על אלו שכבדים מדי, ודוגמים ~~מ~~ מחדש, אבל צריך לדגום ממש מעט
כלומר בממוצע יהיו מעט מאוד משולשים כאלו, ואפילו אקספ' מעט - כמו שראינו
פעם שעברה.
אפשר אפילו לדגום, ואם הדגימה יצאה עם הרבה משולשים כבדים, אפשר
פשוט לדגום מחדש.

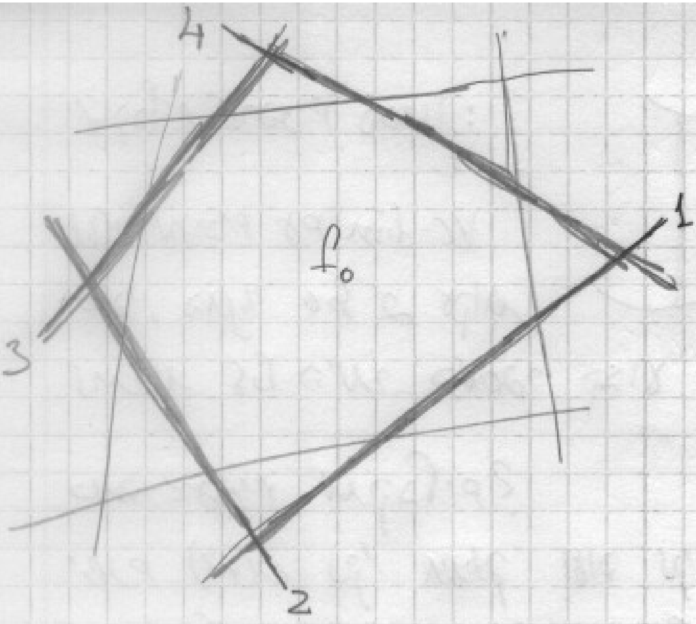
וכעת, ~~[illegible]~~ ניתן להכליל את העניין - לאו בהכרח ~~[illegible]~~ עבודה עם ישרים ולאו
בהכרח רק במישור.

רוצים משהו עם VC-dim סופי. בונים ε-net וכו'. למשל:
* עקומות במישור.
* משטחים ב-3 או יותר מימדים.
למרות שזה מסובך ונצרך להשתמש בקצת גיאומטריה.
~~[illegible]~~ נסתכל על <u>עיגולים במישור</u>:
לוקחים דגימה של r עיגולים.



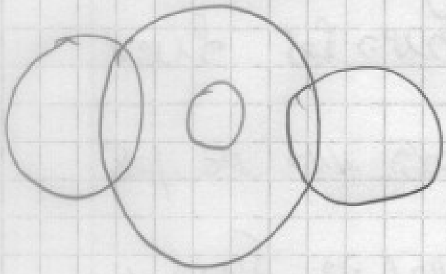
אגב, הערה - למה ~~[illegible]~~ לאחר שלקחנו
דגימה של ישרים, וקיבלנו משולשים,
השתמשנו לחלק את מה שלא היה
משולשים למשולשים...
כדי שיהיה לנו VC-dim סופי.

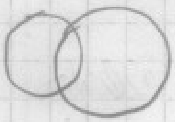
(1-4)



בחרנו 4 ישרים, שיוצרים
פאה, שנחתכת ע"י כל
ישר אחר במערך המקורי!
חלוקת הפאה למשולשים
מנטרלת את זה

נחזור למעגלים.
צריך לחלק לתאים עם סיבוכיות
קטנה גם כאן.



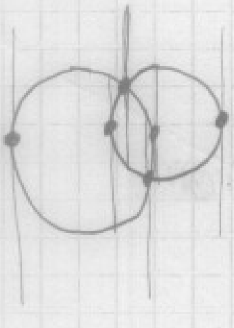


R = דגימה של עקומות/מעגלים.
אנו רוצים לחלק את הפאות
שנוצרו של $A(R)$ לתאים עם סיבוכיות קבועה
(כדי להבטיח VC-dim סופי). סה, 2 שאלות:

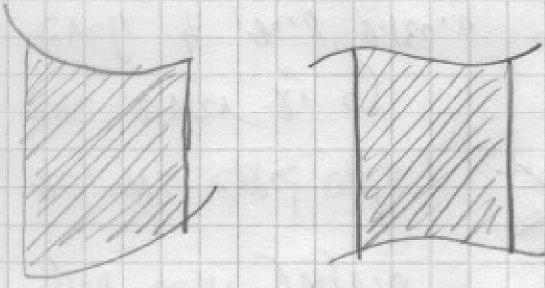
כיצד לבצע את ה- decomposition?
כמה תאים נקבל?

אלו השאלות שהן problem specific.

לעקומות במישור משתמשים ה- <u>Vertical decomposition</u>.
זה עובד גם במימדים גבוהים, אבל זה די מסובך להבנה שם.
<u>במישור</u>: מכל קדקד של $A(R)$, כולל נק' אשר x-extremal - הסיפור
הרגיל - רוצים לעבוד עם עקומות x-מונוטוניות.



מכל קדקד - מעבירים 2 ישרים אנכיים מעלה ומטה
עד שפוגשים עקומה אחרת (או שהם הולכים ל- $\pm\infty$)
מקבלים טרפזים אנכיים (או פסאודו-טרפזים).



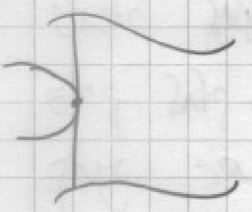
מקבלים טרפזים בסגנון:

ואלו מגוונים עם VC-dim סופי, בתנאי שכל 2 עקומות נחתכות לכל היותר במספר קבוע של נק' s.

כמה טרפזים מקבלים?

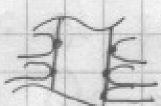
ישנם $O(r^2)$ נק' חיתוך ועוד נק' x-קיצוניות (לא הבנתי) $\Leftarrow$ $O(r^2)$ קטעים. segments

למעשה, כל ישר אנכי שציירנו שייך לקודקוד כלשהו.



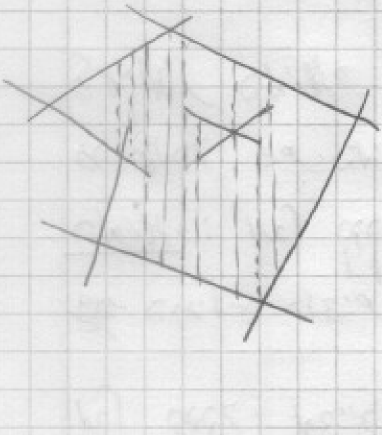
לכל טרפז עושים charging לקיר שלו, וכל קיר משותף לכל היותר ל-3 טרפזים.

לכן, גם כמות הטרפזים הינה $O(r^2)$.

* כרגיל זה נכון תחת הנחת מצב כללי 

במישור אכן מקבלים $O(r^2)$ לכל מערך של עקומות עם מס' נק' חיתוך ביניהן s.
בממדים יותר גבוהים - יש קצת הפתעות.

ואנו נמשיך להשתמש בזה בהמשך. לעת עתה, נעצור כאן.
מה שחשוב לזכור שבהינתן r עצמים, מוצאים $\frac{1}{r}$-cutting עם $O(r^2)$ תאים
ובד"כ פשוט עושים פירוק אנכי (למרות שבמקרה עשינו טריאנגולציה).
למשל, אם יש לנו קטעים במישור:
אפשר לעשות גם כן פירוק אנכי.



ועכשיו, למשהו אחר לגמרי...

Incidences (מילוות)

בין ישרים ונק' במישור.

P: קב' של m נק' (distinct)

L: קב' של n ישרים (כנ"ל)

incedence: זוג $(p,\ell)\in P\times L$ כך ש- $p\in\ell$

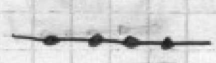
<u>נגדיר:</u>

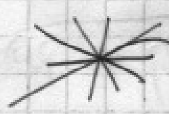
$I(P,L)$ = # ה- incedences ב- $P\times L$.

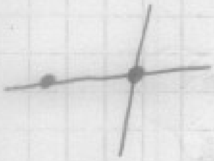
<u>ונסמן:</u>

$$I(m,n)=\max\{I(P,L) \mid |P|=m, |L|=n\}$$

חסם עליון טריוויאלי: $I(m,n)\le m\cdot n$

ושוויון יתקבל: $|L|=n$  אם כל הישרים באותו מקום. אבל כך הם לא distinct

$|P|=m$  אבל כאן הנק' אינן distinct.



אגב, אם $m=2, n=2$, אז $I(2,2)=3$, ולא ניתן לקבל 4

וכשעולה ל m,n יותר גדולים, נקבל אפילו פחות מ- $m\cdot n$.

נראה חסם אשר התגלה לראשונה ע"י Szemerédi-Trotter (1983):

$$I(m,n)=O(m^{2/3}n^{2/3}+m+n)$$

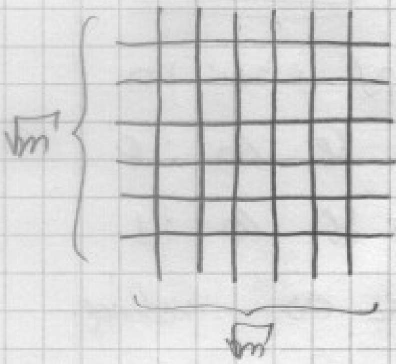
והחסם הדוק ב- WC. והם די סגרו את הבעיה. אבל ההוכחה שלהם היתה די מסובכת, וגם הקבוע היה עצום משהו בסגנון c^{13}.

אז אנשים המשיכו לנסות למצוא הוכחות יותר קלות, ולהכליל את התוצאה, לנק' עם מעגלים, נק' עם ישרים (וספירות) ב- 3D וכו'.

ומעניין שהחזקה של $\frac{2}{3}$ מתקבלת גם בתחולי' ובע"ת באמת מרות. כלו' יש לה די הרבה משמעות...

לפני שנראה את החסם העליון, הבה נסתכל על החסם התחתון.

נראה וריאציה של הבניה המקורית, שקל לנתח.



כי אנחנו לוקחים גריד.
ואז נרצה גם לקחת ישרים ב-$\pm 45°$.
ואם נחשוב קצת יותר, נרצה לא רק
שיפוע 1 (שעוברים ב-$\sqrt{m}$ מהנק')
ניקח גם ישרים עם שיפוע 2 - יעבור ב-$\frac{\sqrt{m}}{2}$ מהנק'.
וכן הלאה ניקח $y=\frac{1}{2}x+\dots$
$\frac{1}{3}x+\dots, \frac{2}{3}x+\dots$
$\frac{1}{4}x+\dots, \frac{3}{4}x+\dots$

עד שנקבל n ישרים ואז בהגדרה נקבל את מה שרוצים.
אגב, אם יש הבדל גדול בין m ו-n אז $m^{2/3}n^{2/3}$ הוא כבר לא הדומיננטי. וליתר דיוק, זה קורה כאשר $\sqrt{n}<m$ (או $\sqrt{m}<n$) ואז הבניות די קלות.
אז המקרה המעניין הוא שכמות הנק' לא קטנה מדי ולא גדולה מדי: $\sqrt{n}<m<n^2$

הבניה שראינו הרגע די מסובכת. אפשר משהו יותר אלגנטי, של Elekes.
נשתמש ב-2 פרמטרים אחרים k,l.
ניקח גם grid, אבל מלבני משהו.

$P=$ כל נק' ה-grid
$|P|=m=$ זה פשוט: $2kl\cdot k$

$\boxed{m=2lk^2}$

נתעלם לרגע מהישרים האנכיים, כי אין יותר מדי כאלו.
למרות שהם עוברים דרך המון נק' אבל ניתן גם בלעדיהם.
$y=x+c$ הוא אולי ישר. דרך כמה נק' הוא יעבור? k. נקבל k אינסידנסים.
אבל אפשר יותר טוב. נקח שיפועים עד l: $y=ax+b$
$a=1,2,\dots,l$
$b=1,2,\dots,kl$

כמה ישרים זה? kl^2. $\boxed{n=kl^2}$
כמה incedences? $\boxed{I=k\cdot n=k^2l^2}$ כי כל ישר נוגע k נק'.

ואם נחשוב לרגע- $mn = 2k^3l^3$

$$\rightarrow I = k^2l^2 = \left(\frac{mn}{2}\right)^{2/3} = \frac{1}{2^{2/3}} m^{2/3} n^{2/3}$$

וקיבלנו אפילו קבוע תג׳ב.

אחלה. ועכשיו לחסם העליון.

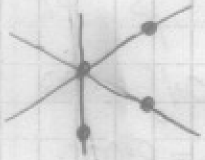
חסם עליון די טיפשי: $I(m,n) = O(m^2+n)$

אגב, הבעיה סימטרית - כי את התפקידים בין הישרים והנק' ניתן להחליף ע"י דואליות. לכן, באותה מידה יכולנו לתת חסם של $O(n^2+m)$.

זה די ברור. כל ישר $l \in L$, או שהוא עובר דרך נק' אחת של p או לפחות דרך 2 נק'. אם ישר לא עובר דרך נק' או נק' שלא נמצאות על ישר - לא מועילים לנו לחסם העליון.

אם כולם עוברים דרך נק' אחת (כל אחד) נקבל n אינסדנס.

כמה ישרים מהסוג השני עוברים דרך p?



כל הישרים זרים, ולכן כל נק' אחרת תהיה על ישר אחר.

לכן p יכול לייצר $m-1$ אינסדנס.

ובסה"כ מקבלים $m(m-1)$ לכל היותר. ולמעשה מקבלים $O(m(m-1)+n)$

עוד משהו שאפשר לעשות:

נחלק את P לסטים בגודל $\sqrt{n}$ כ"א.

נישם את החסם הקודם לכל כזאת תת קבוצה: נקבל $\le 2n$ אינסדנס

$$\Rightarrow I(m,n) \le 2n \cdot \#subsets$$

$$\le 2n \cdot \frac{m}{\sqrt{n}} \le \left(\frac{m}{\sqrt{n}}+1\right)2n = m\sqrt{n}+2n$$

$$\Rightarrow O(m\sqrt{n}+n)$$

או $O(n\sqrt{m}+m)$

ואם $m \le \sqrt{n} \Rightarrow I(m,n)=O(n)$.

$n \le \sqrt{m} \Rightarrow I(m,n)=O(m)$

בדיקת שכיחות. ואם $m=n$ מקבלים $\sim n^{3/2}$

אבל T-ב נוגעים משהו יותר הדוק $\sim n^{4/3}$

נשתמש ב- cuttings!

חסם עליון ע"י cuttings

$L=n$ ישרים.

$r<n$ פרמטר.

נבנה $\frac{1}{r}$-cutting של $A(L)$

נקבל $O(r^2)$ משולשים.

כל אחד נחתך ע"י לכל היותר $\frac{n}{r}$ ישרים של L

כל משולש מכיל נק'. אולי אחד מהם מכיל את כולם.

אולי הם מחולקים באחידות.

הנק' שאם נתעלם מהקצוות, אז כל נק' מוכלת במשולש אחד בלבד.

אם כן, כל משולש מכיל בפנים שלו מס' מסוים של נק'.

הבה נמספר את המשולשים: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{cr^2}$

$P_i = P \cap \tau_i$, $m_i = |P_i|$ - הנק' בכל משולש.

ואם נסכום:

$$\sum_{i=1}^{cr^2} m_i \leq m$$

*הנק' על הגבולות לא כלולות. נטפל בהן ואח"כ

בכל τ_i, נייש את החסם הגולמי (לא הכי גרוע, אלא את $O(m\sqrt{n}+n)$):

$$\Rightarrow \quad I(P,L) = \sum_{i=1}^{cr^2} I(\underset{m_i}{P_i}, \underset{\leq \frac{n}{r}}{L_i}) + (\text{boundries-תרומת ה})$$

לכן, החסם המתקבל הוא $\sum_{i=1}^{cr^2} O\left(m_i\sqrt{\frac{n}{r}} + \frac{n}{r}\right)$

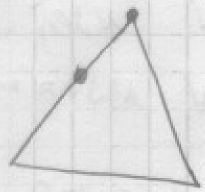
את החלק הראשון ניתן לחסום ע"י $O\left(\frac{m\sqrt{n}}{\sqrt{r}}\right)$

את החלק השני ניתן לחסום ע"י $O(nr)$ סה"כ $O\left(\frac{m\sqrt{n}}{\sqrt{r}} + nr\right)$

קיבלנו 2 גלקים שאחד גדל עם r ואחד קטן. צריך לבחור r אופטימלי.

לפני זה, נבחן מה קורה על הגבולות. הרי בשביל חסם על הגבולות צריך להסתכל על אותו cutting, אי אפשר לקחת יותר, ולקבל חסם יותר ~~...~~ לגבולות.

כל נק' על שפת משולש p, ה"א אינסקנו לישר l, ה"א חיתוך של l עם השפה.



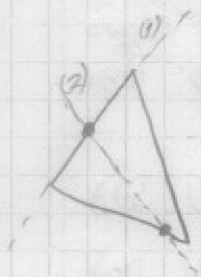
אגב, יכול להיות ששפה של משולש - לא בהכרח מקרה כישר של המארק. אולי שפתו נוצרה ממיגרים שהוספנו כדי לשלש פאה כלשהי.

אבל נק' שה"א קדקד - חייבת להיות על לפחות ישר אחד מאלו שבחרנו.

עבור קדקדים - נשתמש בחסם הגלש. יש $O(r^2)$ קדקדים:

$$\left.\begin{matrix} O(n\sqrt{m}+m) \\ m=cr^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O(nr+r^2)=O(nr)$$

$r<n$



עבור נק' שהן על השפה, אבל לא בקדקדים.
הן או על ישר שחוצה את המשולש
או שהן על ישר שעובר דרך קדקד.

אז כל נק' על שפת משולש שה"א לא בקדקד, מיוצגת, לפי ה"מ את אינסקנס + #החיתוכים בין ישרים למשולשים.

$$\Rightarrow O(r^2)\cdot\frac{n}{r}=O(nr)$$

נחזור לביטוי הכללי:

$$\Rightarrow \frac{m\sqrt{n}}{\sqrt{r}}=nr \to r^{3/2}=\frac{m}{\sqrt{n}} \to r=\frac{m^{2/3}}{n^{1/3}}$$

$$\Rightarrow n\cdot r=m^{2/3}n^{2/3}$$

$1\le r\le n$

ונשים לב שבחירה זו של r צריכה לספק ש-r קטנה מ-n וגדולה מ-1.

וזה נותן את המקרה של $\sqrt{n}\le m\le n^2$.

סימון עם צבע.

כעת, נשתמש בכלי חדש שבעזרתו, נראה הוכחה אפילו יותר יפה.

Crossing Lemma

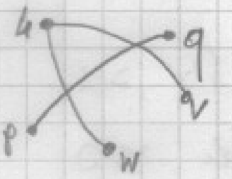
$G=(V,E)$ הוא גרף פשוט (קשת אחת בין כל זוג קודקודים).

ורוצים לצייר את G במישור.

קודקודים מצויירים כנק'.

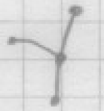
קשתות מצויירות כקשתות ז'ורדן.

מציירים בהנחת מצב כללי, שזה איך שבד"כ מציירים.



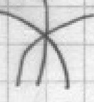
לפעמים מגבילים, ודורשים שהקשתות יהיו קווים ישרים וכו',

אך כאן לא נדרוש בינתיים כלום.



אולי, נוסיף מצב שקשתות לא יעברו דרך קודקודים... שזה מצב כללי.

קשתות משיקות זו לזו.



ללא חצייה מרובה:

אם G ניתן לצייר ללא שום crossings $\leftarrow$ G הוא פלנרי.

במקרה כזה, אפילו ישנם אלג' שמציירים את הגרף במישור, כאשר הנק' על grid לא גדול מדי.

עפ"י נוסחת אוילר, אם G פלנרי, אז $|E|\le 3|V|-6$

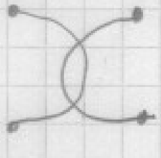
לכה מניחים שדרגת כל פאה היא 3.

ואם $|E|>3|V|-6$ אז כל ציור של G במישור, יכיל לפחות חצייה (crossing) אחת.

נסמן קצת סימנים: $|E|=e$

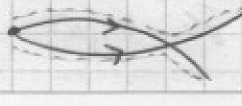
$|V|=v$

$x=$ # חציות $=$ זוגות של קשתות שאין להן קודקוד (vertex) משותף וחוצות זו את זו



$\Rightarrow$ חצייה אחת

הסיבה שדורשים זאת, כי במצב כזה תמיד אפשר להתיר את הסיבוך (untangle)

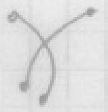


כעת נוכיח ש:

$X \ge e-3v+6$

(די ברור)

אם $e-3v+6 \le 0$, אין מה להוכיח.



אם $e-3v+6 \ge 0$, כבר אמרנו שיש חצ"ה לפחות בין 2 קשתות.

אז נסיר את אחת הקשתות. אולי נאבד הרבה חצ"ת, אבל לפחות אחד.

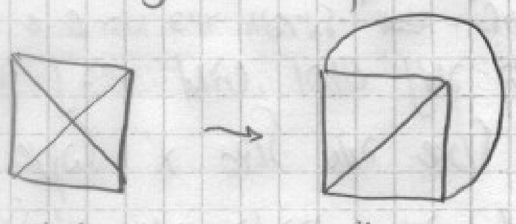
הורדנו קשת אחת. אם עדיין $e-3v+6>0$

כל עוד $e>3v-6$, יהיו חצ"ת.

אם כן, מסירים קשתות וכמות החצ"ת גד"ה שווה לפחות כמות הקשתות שהסרנו.

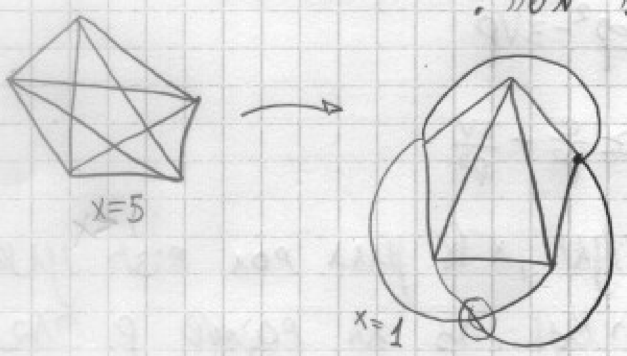
שוב, כמות החצ"ת X תלויה בדרך בה ציירנו את הגרף.

נסתכל על K_4:



x=1 x=0

נסתכל על K_5. K_5 אינו מישורי.



x=5 x=1

נגדיר את X כמספר המינ' של חצ"ת עבור ציור כלשהוא.

ועתה נראה כמה X ח"ב להיות (לפחות).

נוכיח את ה-crossing Lemma בעזרת טיעון הסתברותי.

נצייר גרף חדש G', כאשר מציירים כל קדקד של G בהסתב' כלשהי p. (באופן בת"ל)

קשת שורדת בהסתב' p^2.

חצ"ה שורדת בהסתב' p^4.

החלק של חצ"ת שורדות בהסתב' p^4 קצת טריקי, כי אולי אפשר לצייר את G' אחרת

כלומר, p^4 היא חסם. אולי גם אם 4 הקודקודים "נבחרו", המצ"ה לא תשרוד.

כעת, לגרף החדש יש X' חציות. קודם היה $X \geq e-3V+6$

$$X' \geq |E'| - 3|V'|$$

ניקח תוחלות ונקבל:

$$E[X'] \geq E(e') - 3E(V')$$

וזה הודות ללינאריות התוחלת, כי מסתכלים על סכומים של משתנים מקריים.

$$E[V'] = Vp$$
$$E[e'] = ep^2$$

$$\Rightarrow \quad E[X'] \geq ep^2 - 3Vp$$

בהנחה ש-θ הנו ציור אופטימלי - כלומר X מינימלי,
אם לא נצייר מחדש, ופשוט נמחק קשתות שהקודקודים בקצוות שלהם לא נבחרו, שוב
יינתן שנקבל X' גדול ממה שיכול להיות בגלל ציור מחדש, נקבל חסם
עליון על X'. שוב, במקרה כזה מקבלים: $E[X'] = Xp^4$

$$\Rightarrow \quad Xp^4 \geq ep^2 - 3Vp$$

$$\rightarrow X \geq \frac{e}{p^2} - \frac{3V}{p^3}$$

אנחנו רוצים חסם תחתון על X, ואנו רוצים שיהיה כמה שיותר גדול.
נבחר p שממקסם את זה. נגזור:

$$-\frac{2e}{p^3} + \frac{9V}{p^4} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{p = \frac{4.5V}{e}}$$

צריך להיזהר, כי $p \leq 1$. כלומר $e \geq 4.5V$.

כלומר אם $e \leq 3V$, אין חציות - גרף מישורי.
אם $3V \leq e \leq 4.5V$, לא ניתן לומר יותר מדי.
אם $e \geq 4.5V$, נציב ונקבל:

$$X \geq \frac{e}{\frac{81}{4}\frac{V^2}{e^2}} - \frac{3V}{\frac{729}{8}\frac{V^3}{e^3}} = \frac{e^3}{V^2}\left[\frac{4}{81} - \frac{8}{243}\right] = \frac{4}{243}\frac{e^3}{V^2} \quad \approx \frac{1}{60}$$

לאחרונה, נעשו עבודות שנותנות גם $\frac{1}{30}$, ולא צריך אפילו יותר קשתות e
כמו $e \geq 7V$ וכו'.

לכן, לסיכום, ה-Crossing Lemma:

ע"י שיקול הסתברותי, מקבלים חסם אשר חזק מאוד:

$\frac{4}{263}\frac{|E|^3}{|V|^2}$ לגרף פשוט $G=(V,E)$ המצויר במישור יהיו מאוד לפחות

זוגות של קשתות הנחתכות, בהנתן ש- $|E| \geq 4.5|V|$.

לדוגמא, אם $|E|=\Theta(|V|^2)$, כלומר הגרף השלם, אז $X=\Theta(|V|^4)$.

כלומר, כמעט כל זוג של קשתות נחתכות.

אגב, ישנם גרפים שבהם יהיו הרבה יותר חציות. אבל יותר החסם הנתון ניתן גם לציור

אבל אפשר לצייר פשוט הרבה קליקות בגודל k. יש m קליקות

ואז מקבלים $V=mk$, $e=mk^2$ וכמות החציות תהיה mk^4.

ואז ניתן לראות כי $\frac{e^3}{V^2}=mk^4$ שזה בדיוק החסם.