נזכר בקריטריון הוורוני - $p_i=(a_i,b_i)$

נק' $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ומעניין אותנו המרחק המינימלי בינה לבין כל מהנקודות
(או בינה לבין זו שמרחקה מינ' ממנה).

$$d((x,y),(a_i,b_i))=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}\xrightarrow{\text{נפטר מהשורש}}$$

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2=(x^2+y^2)-2a_ix-2b_iy+(a_i^2+b_i^2)\xrightarrow[\text{כי הוא קבוע לכל } i]{\text{נפטר מ-}x^2+y^2}$$

מקבלים מישורים ב-$\mathbb{R}^3$: $z=-2a_ix-2b_iy+(a_i^2+b_i^2)$

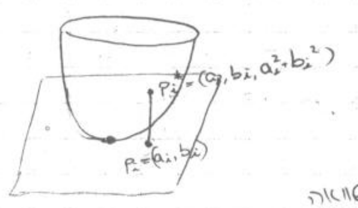
ורוצים למצוא מינימום נקודתי שלהם.
$\min(-2a_ix-2b_iy+(a_i^2+b_i^2))$

כלומר למצוא מעטפת תחתונה..
ההטלה של המעטפת על מישור xy היא דיאגרמת וורוני.

השפה של החיתוך של חצאי המרחבים מתחת למישורים: $z\le-2a_ix-2b_iy-(a_i^2+b_i^2)$

* נשתמש בדואליות ה-II כדי לשמור על יחס מעל-מתחת. נעבור בטרנספורמציה של הדואליות ה-II.
* החיתוך בוודאות לא ריק.

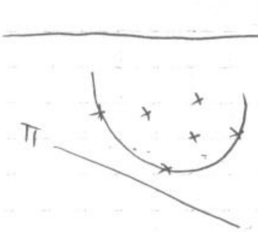
$z=-2a_ix-2b_iy-(a_i^2+b_i^2)\implies(-2a_i,-2b_i,-(a_i^2+b_i^2))\implies$ ובעזרת טרנספורמציה לינארית של המרחב: (נבטל מינוסים ונוריד מקדמים קבועים.) נקבל: $(a_i,b_i,a_i^2+b_i^2)$



* טרנספורמציה של המישור יוצאת פרבולואיד: $z=x^2+y^2$
וזהו סוג של lifting.

* נק' (α,β,γ) עוברת במישור: $z=-2\alpha x-2\beta y+\gamma$

(נציב כשהיא זו את p_i^*) $\implies\gamma=-2a_i\alpha-2b_i\beta+(a_i^2+b_i^2)$
$a_i^2+b_i^2=2\alpha a_i+2\beta b_i+\gamma$



π^* - הנק' הדואליות (נמצאות מתחת לכל המישורים)

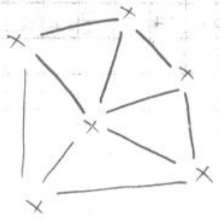
π מתחת לקמור של הנק' הדואליות $\Leftrightarrow$ π^* בחיתוך

לכן, נחשב את הקמור התחתון C של הנק' p_i^* -
השפה שלו דואלית למעטפת.

נק' על המעטפת $\Leftrightarrow$ המישור הדואלי תומך ב-C מלמטה.
נק' על פאה $\Leftrightarrow$ " " תומך בקודקוד
נק' על צלע $\Leftrightarrow$ " " תומך בצלע
נק' על קודקוד $\Leftrightarrow$ " " תומך בפאה (משולש).

המישור שעובר דרך $p^*q^*r^*$ - π
דואלי לנק' π^* שהיא קודקוד של המעטפת התחתונה E.
שהיא חיתוך של p,q,r

אם נטיל את π^* על מישור xy נקבל קודקוד וורוני שקרוב במידה שווה ל-p,q,r



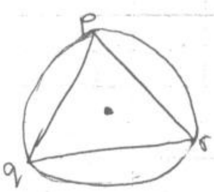
נניח שנטיל את הקמור התחתון C על מישור XY - נקבל:

כל משטח הקמור - "יפלו חזרה למישור" - לומר המצולעים.
C יוטל לקמור של P (וזוהי הנק' שנפלו למישור)
וכל פאה של C אותו למשולש שקודקודיו 3 אחרים
משולשים אלו יהיו זרים זה לזה (בפנימם)

כל הנק' p^* הן קודקודים של C - כי (נמצאות על הפרבולואיד שהוא קמ' קמורה.

קיבלנו פירוק של הקמור של P למשולשים (טריאנגולציה) - זה נקרא דיאגרמת DELAUNAY והיא מסומנת באופן הבא: $DT(P)$

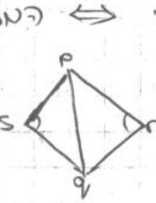
$DT(P)$ דואלית ל- $Vor(P)$:
כל משולש דלוני - pqr - דואלי לקודקוד וורוני הקרוב ביותר ל- p,q,r
כל צלע דלוני - pq - דואלית לצלע וורוני המשותפת ל-$V(q)$ ו-$V(p)$
כל קודקוד " הוא תא וזה דואלי לתא וורוני.



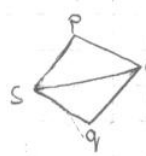
משולש דלוני pqr דואלי לקודקוד וורוני הנמצא במרכז המעגל החוסם את משולש זה - לכן נק' פגישת האנכים האמצעיים

מעגל זה - בהכרח אינו מכיל אחרים! זה נקרא תכונת המעגל הריק.

טענה: pqr הוא משולש דלוני $\Leftrightarrow$ המעגל שחוסם אותו הוא ריק מאחרים.

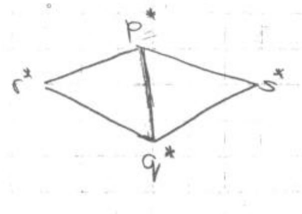


עבור 2 משולשים צמודים - בדלוני סכום הזוויות r ו-s חייב להיות $< 180^\circ$



כמובן, תמיד ניתן להחליף את הקו שמחלק את המחומש למשולשים

לדיאגרמת דלוני תכונות רבות. למשל, היא מביאה למקסימום את הזווית הקטנה ביותר.



בחישוב הדיאגרמה אנו צריכים לבדוק את תכונת המעגל הריק.
נרצה לבדוק אם s^* (נמצאת מעל/מתחת למישור $p^*q^*r^*$
נעשה זאת ע"פ סימן הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \\ 1 & s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2+r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2+s_y^2 \end{vmatrix}$$

s^* מתחת למישור אם סימן הדטרמיננטה (+)
זה קורה $\Leftrightarrow$ s בתוך המעגל החוסם את pqr

נניח שמשוואת המישור של $p^*q^*r^*$: $z=2ax+2by+c$

$$\left\{\begin{array}{l} p_x^2+p_y^2=2ap_x+2bp_y+c \\ (p_x-a)^2+(p_y-b)^2=a^2+b^2+c=\underbrace{r^2}_{\text{נסמן}} \end{array}\right.$$

וכנ"ל עבור q ו- r

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \equiv$ זהו המעגל העובר דרך p, q, ו-r.
כש-s נמצאת בתוך המעגל: —

$s_x^2+s_y^2 \le 2as_x+2bs_y+c$

אז s^* מתחת למישור.

עמ' 3 * מישורים שחותכים את הפרבולואיד - יוצרים הטלה של החיתוך על מישור xy צורת מעגל.

שימושים בדיאגרמת וורוני

(1) המוטיבציה לדיאגרמת וורוני היתה בעיית סניפי הדואר —
נתונה קב' של n נקודות במישור
לבנות את P למבנה נתונים כך שבהינתן נק' שאילתא (x,y)
נמצא במהירות את הדואר הקרוב ביותר.

פתרון - נחשב את דיאגרמת וורוני ונבצע עליה ל-point location

סיבוכיות מקום - $O(n)$
סיבוכיות זמן מוקדם - $O(n\log n)$
סיבוכיות שאילתא - $O(\log n)$

לעשות תרגול(שאלה) לדיאגרמת וורוני לפי קב' - נחלק כל תא וורוני למשולשים

---

(2) בהינתן קב' נק' P במישור - למצוא את זוג הנק' הקרובות ביותר.

טענה: אם p,q זוג נק' קרוב ביותר אזי pq הוא צלע דלוני (הקצרה ביותר)

ולכן נחשב DT(P), נעבור על הצלעות ונמצא את הקצרה ביותר.
נק' האמצע של קטע זה נמצאת על קשת וורוני בין p ו-q,
אחרת היה קיים אחר r יותר קרוב ל-c

$rq \le rc + cq \quad , \quad rc < qc$
$rc < pc$

$rq \le rc + cq < cp + cq = pq$

כלומר מרחק q מ-r, קטן ממרחק q מ-p בסתירה להיות p,q זוג נק' הקרוב ביותר.

---

(3) מציאת כל השכנים הקרובים ביותר (All nearest neighbours)

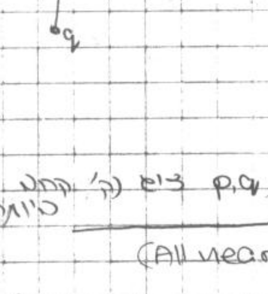
לכל $p \in P$ למצוא את הנק' הקרובה ביותר.

$O(n\log n)$] אם q השכן הקרוב ביותר של p, אזי pq קשת דלוני כמו קודם

$O(n)$ [נחשב DT(P) - לכל נק' p נעבור על כל הקשתות דלוני שיוצאות ממנו ונמצא לכל את הכי קצרה.

על כל קשת עוברים פעמיים ויש $\le 3n-6$ קשתות.

> הערה: כלל DT(P) דואלית ל-Vor(P) כמבנה משולשים.
> נומון שלכל פאות וורוני מתאים (קי' = האמר של הפאה)
> ולכל זוג פאות וורוני שכנות מחברים את הנק' המתאימות
> בקשת (דלוני = קו ישר)



גרף שכנויות - מורכב מאוסף קשתות שמחברות את קשתות
וורוני הדואליות.

---

pq נמצאת בגרף שכנויות ⇔ המעגל שקוטרו pq ריק.

אם $pq \in DT(P)$ אז קיים מעגל העובר דרך p, q והוא ריק

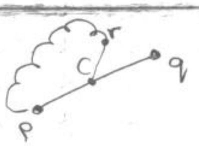
תא 4 (4) עץ פורש מינימלי אוקלידי (EMST)

עבור P קב' של n נקודות במישור. האלג' הקלאסי רץ ב- $O(E+V\log V)$
כאשר $E=\Theta(V^2)$
מכיוון שנדרש להתחשב בכל הגרף השלם.

טענה: $EMST \subseteq DT$

לכן נחשב $DT(P)$ ונריץ אלג' רגיל למציאת MST על $DT(P)$ בלבד
• ועכשיו $E \le 3n-6$

הוכחה: pq קשת של EMST



נניח בשלילה ש-C קרובה יותר לאחר r

נניח כי קיים מסלול מ-r ל-p - נרצה להחליף את pq ב- qr, כאשר ע"פ שוויון המשולש:
$qr < pq$

נקבל עץ פורש קל יותר ⇐ בסתירה
להיות pq קשת של EMST.

פגשנו בעיות של דיאגרמות וורנוי עם הפרמטרים הבאים -

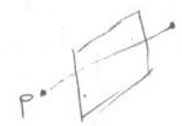
סוג האובייקט - נקודות
המטריקה - אוקלידית
המימד - $d=2$
כמה שכנים קרובים - אחד או $n-1$.

אחד = קרוב ביותר, מעטפת תחתונה
$n-1$ = רחוק ביותר, מעטפת עליונה

במשך השנים התפתח מגוון רחב של דיאגרמות וורנוי עם פרמטרים שונים.

נדבר מעט על דיאגרמת וורנוי ב-3 מימדים.

עבור 2 נק': q



מישור האנך האמצעי יפריד בין התא של p לתא של q.

באופן כללי, למציאת התא של נקודה p - נבנה את כל המישורים h_{pq} האנכים האמצעיים בין p לכל נקודה אחרת q - וניקח את החיתוך של חצאי המרחבים המכילים את p והחסומים ע"י המישורים.

התא של p = חיתוך של $(n-1)$ חצאי מרחבים - כלומר, פאון קמור (חסום או לא) עם $\le n-1$ פאות. לכן, לפי אוילר לכל תא יש סיבוכיות $O(n)$ וניתן לחשבו בזמן $O(n\log n)$ (p נק' ופנימה בחיתוך)
ובסה"כ לדיאגרמה יש סיבוכיות $O(n^2)$ וניתן לחשבה בזמן $O(n^2\log n)$

במקרה הגרוע ביותר לדיאגרמה ב-$\mathbb{R}^3$ יש סיבוכיות $O(n^2)$ - $O(n)$ תאים - כ"א בעל סיבוכיות $O(n)$.

דוגמא לדיאגרמה ריבועית בסיבוכיות שלה: $(\frac{n}{2})$ נק' על ציר x ($y=0$)
$(\frac{n}{2})$ נק' על הישר ($x=0$, $z=1$)

ב-d מימדים דיאגרמת וורנוי היא מעטפת תחתונה ב- $d+1$ מימדים של פני הקמור ב- $d+1$ ממדים אשר סיבוכיותם $O(n^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}) = O(n^{\lceil\frac{d}{2}\rceil})$