ממשיכים עם עניני הקירובים...

ראינו את הקירוב של קוטר ב- R^d ... קצת תזכורת.

בונים קב' V_d על ספירת היחידה S^{d-1} של כיוונים, כך שלכל כיוון $u\in S^{d-1}$ קיים כיוון $a\in V_d$ כך שהזווית θ ביניהם מקיימת

$$\cos\theta > \frac{1}{1+\varepsilon}$$

כעת, לכל וקטור x שכיוונו $\frac{x}{\|x\|}$, ניקח כיוון a ב- V_d שקרוב אליו

$$x\cdot a = \|x\|\cdot\cos\theta > \frac{\|x\|}{1+\varepsilon}$$

כלומר, המכפלה הסקלרית ב-a היא קירוב טוב לנורמה.

עבור הקוטר, הרי רוצים למצוא את המקס' של $\|y-x\|$. כלומר $\max_{x,y\in P}\|y-x\|$.

במקום זה, אנו נמצא לכל a ב- V_d את $\max_{a}\left[\max_{x,y\in P}(x-y)\cdot a\right]$.

זה תמיד קטן מהקוטר. ליתר דיוק, מה שנמצא הוא תמיד בין הקוטר לבין הקוטר $\cdot\frac{1}{1+\varepsilon}$.

קצת נפתח סוגריים; (בנורמה אי אפשר לעשות את הפעולה הבאה, אבל במכפלה סקלרית כמובן אפשר;

$$\max_{x,y\in P}(x-y)\cdot a = \max_{x,y}(x\cdot a - x\cdot b) = \max_{x} x\cdot a - \min_{y} y\cdot a$$

קיבלנו אלג', $O(n|V_d|)$, כאשר $|V_d| = O(E^{\frac{d-1}{2}})$, $E=\frac{1}{\varepsilon}$.

* אם קודם ניקח את הנק' ונעגל לשריג ורק עליהם נפעיל את האלג'.

זה יתן לנו שיפור:

$$O(n\cdot E^{\frac{d-1}{2}}) \xrightarrow{\text{קודם שריג}} O(n+E^{d}\cdot E^{\frac{d-1}{2}}) = O(n+E^{\frac{3d-1}{2}})$$

שזה כבר strongly לינארי. כל ה- LTAS וכו'.

אבל אפשר לשפר אפילו עוד, ע"י הורדת ממד:

נניח 2 קואורדינטות x_1,x_2; נעשה כיסוי של הספירה ב- R^2, ויש לנו V_2.

לכל $(a_1,a_2)\in V_2$ קבוע $\quad \|x\|^2 = x_1^2+x_2^2+\|\cdot\|_{d-2}^2$

במקום $x_1^2+x_2^2$ נכתוב $a_1x_1+a_2x_2$.

אז הנה הטלה שמקטינה בממד אחד:

$$\Pi_a x = (a_1x_1 + a_2x_2, x_3, x_4, \dots, x_d)$$

נגיד שקירוב $1+\varepsilon$ של קירוב $1+\varepsilon$ הוא קירוב $\sim 1+2\varepsilon$ כי

$$(1+\varepsilon)^2 = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2$$

זניח...

אני עושה את זה k פעמים ועדיין פשוט נתחיל עם ε יותר קטן וככה נקבל קירוב $1+\varepsilon$ שרוצים.

כעת, נסתכל על הנורמה של $\Pi_a x$: $(a_1x_1+a_2x_2)^2 \le x_1^2+x_2^2$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\|x\|^2 \le \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}(x_1^2+x_2^2)+(x_3^2+\dots+x_d^2) \le \|\Pi_a x\|^2 \le \|x\|^2$$

כלומר קירבנו את התרומה של 2 הקואור' הראשונות לנורמה של x.

עושים את זה k פעמים ומקבלים את נוסחת הנסיגה הבאה. (קודם כל הופכים לסריג ואז עושים את כל העניין):

$$T_d(n) = O(n + E^{1/2}\cdot T_{d-1}(E^{d-1}))$$

להפוך לסריג   אורך $\sqrt{2}$

אם בכל טור של הסריג נשמור רק נק' עליונה ביותר ותחתונה ביותר.
גם אם נעבור את הקטר הזה נכון, הטעות תהיה קטנה.

הפתרון של נוסחת הנסיגה:

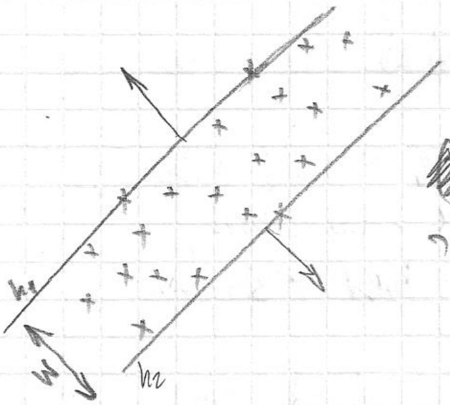
$$T_d(n) = O(n+E^{d-\frac{1}{2}})$$

ואפשר כמובן לבדוק באינדוקציה שזה אכן נכון...

מספיק לרגע עם קטר והבה נדבר על עובי, בממדים גבוהים.

עובי ב-R^d

P קב' של נק' ב-R^d, ורוצים למצוא מרחק מינימלי בין 2 על מישורים מקבילים שמכילים את P בניהם. מין פס/slab.



ניהלנו כבר את הדיון לגבי זה שכמות המועמדים לזוג מישורים גדלה אקספ' בממד. למשל ב-3 ממדים זה או קודקוד קמור עם פאה נגדית או צלע לצלע.

בעצם רוצים לקבוע את כיוון' השני מישורים, ומעוניינים במקדמים שלהם. אם נסתכל על הנורמלים שלהם, והמישורים פשוט יהיו מוגדים.

המשוואות של המישורים (עבור ξ שהוא וקטור קואורדינטות) הם:

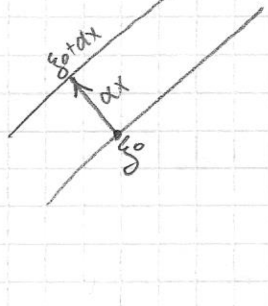
$$x \cdot \xi = y \qquad x \in R^d$$
$$x \cdot \xi = z \qquad y \in R$$

עם קבע נרמול מסוים, נניח ש $z = y+1$. לכן:

$$\Rightarrow \quad x \cdot \xi = y \quad , \quad x \cdot \xi = y+1$$

אם המרחק בין השני מישורים הוא w, אז $\|x\| = \frac{1}{w}$

נראה למה:



$$x \cdot \xi_0 = y$$
$$x \cdot (\xi_0 + \alpha x) = y+1$$
$$\alpha \|x\|^2 = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{\|x\|^2}$$

$$w = \|\alpha x\| = \alpha \|x\| = \frac{1}{\|x\|}$$

במקום למצוא min w, נחפש max$\|x\|$, כאשר $x \in R^d$ ו-$y \in R$ ויש לנו אילוצים:

$$\forall p \in P \qquad y \leq x \cdot p \leq y+1$$

יש לנו חב אילוצים לינאריים, והנורמה היא פונק' קמורה אבל זה לא
כאשר רוצים למצוא לה מינימום.

מקסימום של נורמה זה "לא טוב", והוא יכול להתקבל בכל מקום.

<u>פתרון מדויק:</u>

נחשב את האוסף הפיזיבילי K : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^{d+1} \mid y\le px \le y+1 \ \forall p\in P\}$

זה קודקוד לאיטוב קמור, ואפשר לעשות זאת בזמן $O(n^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}) = O(n^{\lceil d/2\rceil})$.

אז פשוט עוברים על כל פאה (מכל ממד) ובודקים את ה-$\|x\|$max עליה.
למעשה פשוט עוברים על כל הקדקודים שהם המועמדים להיות הכי רחוקים מהראשית.
אבל רוצים משהו מקורב, והרבה יותר יעיל.

נתבונן ל- V_δ

$\frac{\max\|x\|}{\max a\cdot x}$ לכל $a\in V_\delta$

ועכשיו כל בעיה היא LP, פותרים בזמן $O(n) \Rightarrow O(n\cdot E^{\frac{d-1}{2}})$

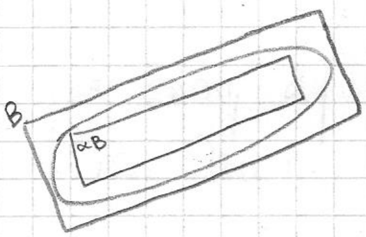
לקבלת strong LTAS :

<u>טענה:</u> (ללא הוכחה)

בהינתן קב' קמורה C, עם פנים לא ריק, אפשר למצוא קופסה B שמכילה את C, כך ש αB מוכל ב-C, $\alpha<1$ קבוע שתלוי רק בממד.

(ולחשב אותה בזמן סביר)

בציור:



אם C היא הקמור של P, אז העובי של B יהיה קירוב סביר (פרופ' ל-α) לעובי של P.

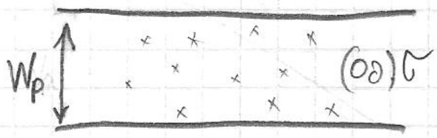
ברגע שיש קירוב טוב לעובי, אפשר לבנות סריג, שכל תא בו הוא הזזה של $\alpha\varepsilon B$, כלומר מקווצים את הקופסה הקטנה ומעגלים בסריג.

~~נ~~ נעגל את P בנק' המרכז כל תא שמכיל נק' של $P \leftarrow Q$.

$|Q| = O(E^{d})$

נחשב ל-Q קירוב לעובי, כלומר נחשב W_Q בקירוב $1+\varepsilon$, אז

העובי של P $\le \frac{W_Q}{1+2\varepsilon}$ נוכיח:



ובלטינית:

סכום מינקובסקי

$$Q \subseteq P \oplus \alpha\varepsilon B$$

$$\Rightarrow CH(Q) \subseteq CH(P) \oplus \alpha\varepsilon B$$

המעבר האחרון הוא תרגילון. לכתוב את הסכום הקמור שמוביל לכל נק' ב-Q, ואז אותו דבר ל-P...).

$$CH(P) \oplus \alpha\varepsilon B \subseteq CH(P) \oplus \varepsilon CH(P) = (1+\varepsilon) CH(P) \subseteq (1+\varepsilon) T$$

$\Leftarrow$ Q מוכל בפס בעובי $W_P(1+2\varepsilon)$.

ואז סה"כ השגיאה הוא $1+3\varepsilon$ (כי $(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)$...)

ואז כנראה שקיבלנו אלג':

$$\Rightarrow O(n + E^{d} \cdot E^{\frac{d-1}{2}}) = O(n + E^{\frac{3d-1}{2}})$$

ולנושא הבא.

Coresets

נתונה קב' P = n נק' ב-R^d.

רוצים לחשב "מידה" $\mu(P)$. למשל, קוטר, עובי, רדיוס כדור חוסם מינימלי, נפח של קופסה חוסמת מינימלית, וכו'.

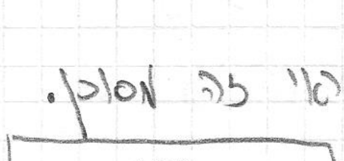
<u>הרעיון</u>: להחליף את P <u>בתת-קבוצה</u> Q יותר קטנה, כך ש-$\mu(Q)$ יהיה קירוב סביר (עד כדי $1\pm\varepsilon$) ל-$\mu(P)$.

נניח ש-$\mu(Q) \le \mu(P)$ (כלומר, מונוטוני).

המטרה: $(1-\varepsilon)\mu(P) \le \mu(Q)$

עבור מה שרוצים כאן, לדגום באופן אקראי זה מסוכן.

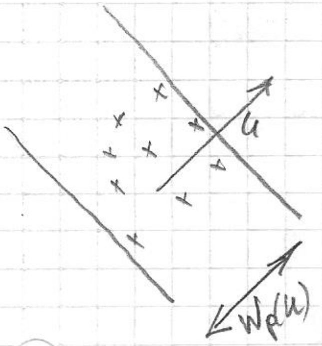
אם למשל רוצים מעגל חוסם של הקב':



ננסה לבנות פרדיגמה שעובדת להרבה מקרים. בשביל סריג מיינים קירוב קבוע אז אי אפשר טרם לעשות סריג...

בכל אופן, ל-Q נקרא Coreset, "קבוצת ליבה".

נגדיר ε-kernel: זה קבוצה $Q\subseteq P$ כך שלכל $u\in S^{d-1}$, העובי של Q בכיוון u מקרב את העובי של P בכיוון u.



בהינתן u, מוצאים מין מלחציים/מצילגיים?

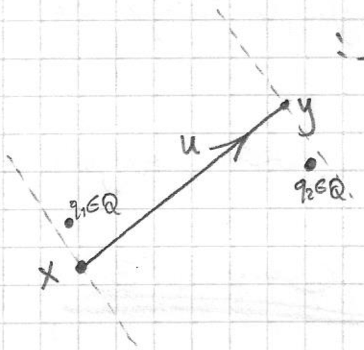
אבל את זה יחסית קל לעשות:

$$W_P(u)=\max_{x\in P} u\cdot x-\min_{x\in P} u\cdot x$$

נרצה שמתקיים:

$$(1-\varepsilon)W_P(u)\le W_Q(u)\le W_P(u)$$

נניח שיש לנו את זה. הנה כמה דוגמאות:



* קוטר:

$(1-\varepsilon)W_P(u)\le W_Q(u)\le$ קוטר Q

קוטר P

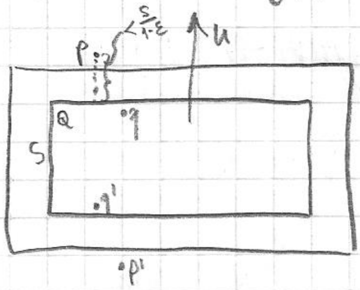
* עובי: ברור שזה טוב, כי זו בדיוק ההגדרה.

כתרגיל אפשר גם לראות שזה טוב לשאר הדברים שרוצים.

לגבי קופסה זה קצת עדין, אז נראה עכשיו:

* קופסה חוסמת מינימלית:

ניקח קופסה חוסמת מינימלית (מנפח) ל-Q וננפח אותה פי $1+\varepsilon$.



לכל כיוון u מאונך לפאה של B, הנק' הקיצוניות ב-P בכיוון זה, נמצאות ב-$(1+\varepsilon)B$.

$\Leftarrow$ $P\subseteq(1+\varepsilon)B$

$$(1-\varepsilon)W_P(u)\le W_Q(u)$$

אם לעשות ניקח זוג נק' p,p' אפשר להחליף אותן בזוג q,q' של-Q ←

כך ש-

$$(1-\varepsilon)\underbrace{(p-p')u}_{\le \frac{s}{1-\varepsilon}} < (q-q')\cdot u \le s$$

אוקיי. אז איך עושים את זה? כיצד שומרים את העובי לכל כיוון?

יש תכונה, די מבקש עבור מה שרוצים, להסתכל על הקמורים של P ו- Q.

המגבלתיים בכל כיוון שמפסים את Q ואת P, ההפרש ביניהם צריך להיות קטן. ייתכן שהקמור הוא קצת נקניק ובכיוונים שונים יהיו מרווחים שונים בין P ו- Q. המטרה שלנו: נרצה להפוך את P לקבוצה "שמנה".

<u>תכונה:</u> קיימת קבוצה C וקבוע $\alpha<1$ שתלוי רק בממד כך ש-

$$\alpha C + \text{תזוזה} \subseteq CH(P) \subseteq C$$

צריך לבנות את Q בצורה "הוגנית" שבכל הכיוונים יהיה אותו כלל פחות או יותר.

העובדה שראינו קודם לגבי תכונת קבוצה קמורה, היא מקרה פרטי של המשפט הבא:

<u>Löwner-John</u> ('48)

<u>משפט:</u> האליפסואיד E החוסם בנפח מינימלי של CH(P) מקיים:

$$\alpha_d E \subseteq CH(P) \subseteq E$$

$$\alpha_d = \frac{1}{d+1}$$

והרי חישוב אליפסואיד חוסם מינימלי זה בעיית LP-type...

נבנה העתקה לינארית של המרחב שהופכת את E לכדור. מסובבים, מקבילים לצירים

[illegible]

מכווצים ואפילו אפשר לשמור את הנפח.

נקרא להעתקה τ שהופכת את E לכדור B (כדור יחידה):

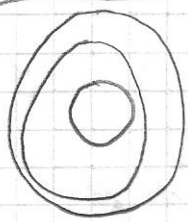
$$\alpha_d B \subseteq CH(\tau(P)) \subseteq B$$

ב-2D: למשל $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x'=\frac{x}{a}$, $y'=\frac{y}{b}$
⇓
כדור יחידה

ואז, לכל כיוון u מתקיים

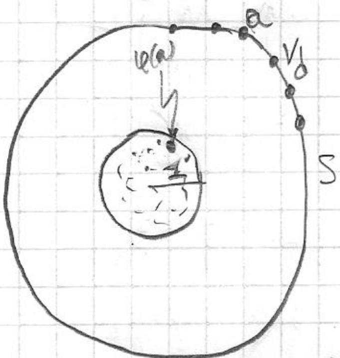
כדור יחידה

$$2\alpha_d \le \max_{p\in P} u\cdot\tau(p) - \min_{p\in P} u\cdot\tau(p) \le 2$$



לכן, $W_{\tau(P)}(u)$ היא בערך קבועה.
את הטרנספורמציה מחשבים בקלות כי זה LP-Type.
כעת, רוצים לבנות את Q, ונחזיר אותה לקואורדינטות המקוריות (נטען "שהכל נשאר אותו דבר").
כלומר, אם היה שיוויון מבחינת לפני הטרנס' אז גם אחרי, כי היו שיוויונות הם לינאריים, והטרנספ' לינארית...

ניקח ספרה S ברדיוס $\sqrt{d}+1$ סביב הראשית את הקב' $V_d(\varepsilon)$.
כעת, נמקם את אותם כיוונים על S (במקום על כדור היחידה).

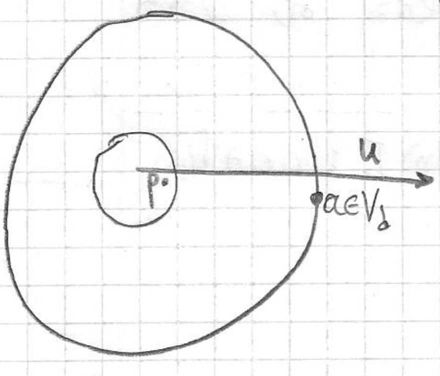


לכל $a\in V_d$ נסמן ב- $\varphi(a)$ את הנק' ב-P הקרובה ביותר ל-a.

$$Q=\{\varphi(a)\mid a\in V_d\} \quad , \quad |Q|=O(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}})$$

ניקח כיוון u, ניקח נק' $p\in P$ (p היא $\tau(p)$) קיצונית בכיוון u

$$p\cdot u=\max_{x\in P} x\cdot u$$



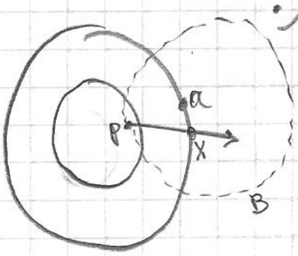
ניקח a קרובה ל-x

$$\theta=\measuredangle x,a$$

בערך

$$1-\frac{\theta^2}{2}\sim\cos\theta>\frac{1}{1+\varepsilon}\sim 1-\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \theta\sim\sqrt{\varepsilon}$$

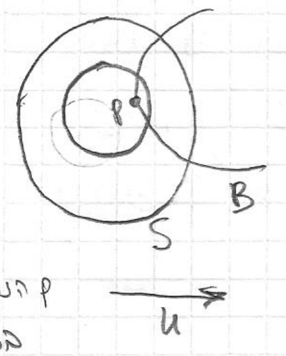
רוצים לתקן את זה קצת. בעצם נדרוש $\theta\sim\sqrt{\alpha\varepsilon}$, כלומר שהקב' תהיה קצת יותר צפופה והזוויות קצת יותר קטנות.

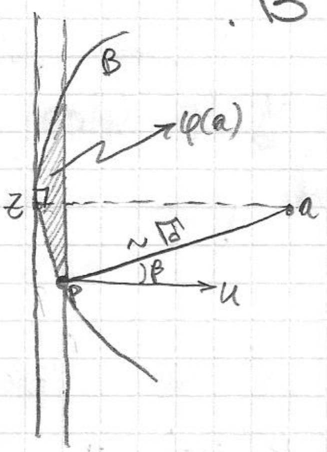


נלך מ-p בכיוון u, ונראה היכן נחתוך את S.
נסתכל על B, כדור ברדיוס ap סביב a
יש 2 אפשרויות:

* אפשרות 1: $\varphi(a)=p$ אז $p\in Q$, וזה נהדר, כי אז המצולע ב-Q יתפוס את הנק' ולא תהיה שום שגיאה..

* אפשרות 2: $\varphi(a)\neq p$. אבל: מרחק $\varphi(a)$ מ-a $\geq ap$
לכן $\varphi(a)$ מחוץ B.





$$z\cdot u \le \varphi(a)\cdot u \le p\cdot u$$

$$\beta \sim \theta$$

אפשר להעמיד פנים מבלי לשנות יותר מדי את הקבועים ש-$\sqrt{\varepsilon\alpha}\sim\beta$.
לכן, הפער בין $u\cdot z$ ל-$u\cdot p$:

$$p\cdot u - z\cdot u \sim \underbrace{(1+\sqrt{d})}_{\text{הרדיוס של S}}(1-\cos\beta) \sim (1+\sqrt{d})\frac{\theta^2}{2} \sim \boxed{\sqrt{d}\,\alpha\varepsilon}$$

מה אפשר לומר על $\max_{x\in P} u\cdot x - \max_{x\in Q} u\cdot x$. זה חצי ממה שאנחנו צריכים לעשות, כי צריך להשוות גם את המינימום עם הטלות בכיוון ההפוך.

$$\max_{x\in P} u\cdot x - \max_{x\in Q} u\cdot x \le u\cdot p - u\cdot z \sim \sqrt{d}\,\alpha\varepsilon$$

כאן משום מה מיכה נתקל באיזה קושי והוא אומר שכנראה צריך לשנות את ההגדרה של $\tilde{\varepsilon}$? אולי לא.
למה? מה שבעצם רוצים להראות שההפרש הוא בערך $\varepsilon W_p(u) \sim$ אז ההפרש בין המינ' למקס' יהיה עד כדי $1-2\varepsilon$ או משהו.
בגלל ש-P שמנמן, העובי שלו בכל כיוון הוא לפחות α.
$W_p(u)\geq\alpha$

$$\Rightarrow\quad up-uz \sim \sqrt{d}\,\alpha\varepsilon \sim \sqrt{d}\,\varepsilon W_p(u)$$

בכל כיוון u, מסתכלים ב-u וב-$-u$ אז נקבל את הענין לעיל כפול 2,
אז Q יהיה ε-kernel כמו שצריך.

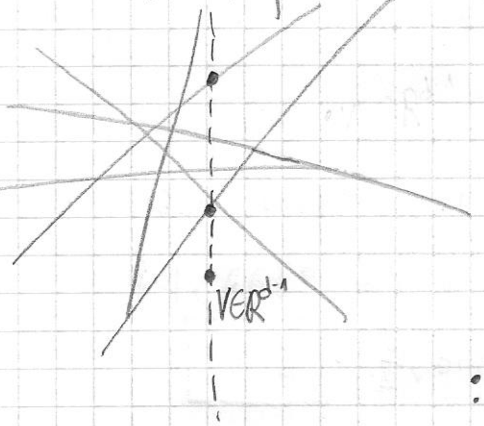
אם כן, קיבלנו אלג' לחישוב Q.

את Q אפשר לחשב בזמן $O(nE^{\frac{d-1}{2}})$ באופן טריביאלי: לכל נק' ב-V_0 מחשבים את הנק' הקרובה ביותר... אפשר לשפר אבל לא נתעמק בזה יותר מדי.

גודלה של $|Q|$ כמו הגודל של V_0; $|Q|=O(E^{\frac{d-1}{2}})$ (לכל היותר)

ואז על זה אפשר לחשב פתרון מדויק או מקורב, כפי שבא לנו.

והדבר הזה הוא אפילו יותר טוב ממה שהוא נראה. למה? אפשר להפעיל דואליות. נקודת p יעברו לקב' H של על מישורים.

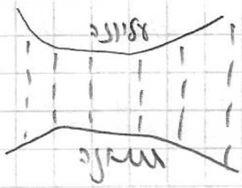


נתפוס נק' v ונרצה לקבוע מי הכי נמוך ומי הכי גבוה מאותה קואורדינטה, שזה קצת מזכיר עומ'. סוג של.

לכל $v\in\mathbb{R}^{d-1}$, נגדיר extent ב-v:

$$\mathcal{E}(v)=\max_{h\in H}h(v)-\min_{h\in H}h(v)=$$

$$=\text{מעטפת עליונה}(v)-\text{מעטפת תחתונה}(v)$$



נקבל את ההפרש במעטפות

ט' $v\in\mathbb{R}^{d-1}$ דואלי במובן מסוים לכיוון $u\in S^{d-1}$ (בפרימאלי) ו-$\mathcal{E}(v)$ הוא פרופורציונלי ל-$W(u)$, קבוע הפרופורציה משתנה עם v ו-u, אבל לא תלוי ב-P וב-Q (או לחילופין ב-GCH של על מישורים).

כלומר ה-width הוא בערך ε... ואז ההפרש הקטן בין הקב' המקורית למקורבת יהיה קטן גם כן.

לסיכום, הנרמול הולך לעבוד כשעוברים למישור הדואלי, אבל עם הפקטור הנרמול כאילו אומר, וכך נקבל את הקב' מישורים שהתכונה מתקיימת עבורה.

טענה, התכונה

הגדרה שנתק"ם הי'א של- $G \subseteq H$ תהיה ε-kernel אם לכל $v \in \mathbb{R}^{d-1}$, $(1-\varepsilon)\mathcal{E}_H(v) \le \mathcal{E}_G \le \mathcal{E}_H(v)$

והאמת, במקום על מישורים, אפשר לקחת פונקציות אלגבריות בערך אילו שבא לנו. למשל פולינומים, וע"י לינאריזציה להתייחס אליהם בתור על מישורים.

אפשר יהיה לחשב מעטפת, ולדמיין שנק' נעות בזמן, וה-ε-kernel יוכל לייצג המון דברים שימושיים.