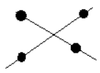
<u>מרחבים רציונליים עם נקודות מסומנות</u>

$M_{g,n}$ זה סימון למרחב מודולי עם n נקודות מסומנות שונות (למשל ע"י מספרים 1, 2, ..., n).

היום נדבר על $M_{0,n}$. המרחב לא שלם!



לכן מוסיפים איברים נוספים למרחב, כך שיתקבל מרחב שלם. $\overline{M_{0,n}}$.

הנקודות שמתווספות אלה עצים, עם תנאי היציבות של Mumford : מספר סופי של אוטומורפיזמים.

משפט. קיים $X_n = \overline{M_{0,n}}$ מרחב מודולי מסוג fine, ויש לו מספר תכונות טובות, למשל:

שלם, יריעה אלגברית פרויקטיבית, HI, קיימות 2 בניות משותפות (של Knudsen ושל Keel), קיים תיאור מפורש לחוג הקוהומולוגיות.

משפחה אוניברסאלית מעל X_n איזומורפית ל- X_{n+1} כי זה כמו לבחור עוד נקודה

$$\begin{array}{c} U_n = X_{n+1} \\ \downarrow \\ X_n \end{array}.$$

דוגמאות פשוטות. X_3 זו נקודה. X_4 זה ישר פרויקטיבי ($M_{0,4}$ זה ישר פרויקטיבי בלי 3 נקודות, וצריך להוסיף 3 עצים).

קיימת העתקה טבעית (שכיחה, קונטרקציה או כיווץ) $f_{i_1,\dots,i_k} : X_n \to X_k$. מוחקים את כל הנקודות המיותרות, ולכווץ את הלקים הלא יציבים.

תזכורת. חוג צ'או זה חוג של שנבנה באופן דומה לחוג קוהומולוגיות, אבל במסגרת של גיאומטריה אלגברית. $A^k =$ ציקלוסים אלגבריים מקו-מימד k (אלגברית, $2k$ טופולוגית) מודולו שקילות רציונלית. כפל זה חיתוך. קיימת העתקה טבעית $A^k \to H^{2k}$.

הגדרה. מרחב נקרא HI (קיצור של איזומורפיזם הומולוגי) אם ההעתקה זו היא איזומורפיזם בין חוג צ'או לחוג הקוהומולוגיות. בפרט זה אומר שאין קוהומולוגיות במימדים אי-זוגיים, ושחבורות הקוהומולוגיה הן אבליות חופשיות.

רעיון הבנייה של Knudsen: לנפח על האלכסון את $X_n \underset{X_{n-1}}{\times} X_n$ ונקבל X_{n+1}.

חיסרון בבניית Knudsen מנקודת המבט של Keel: האלכסון לא משוכן באופן רגולרי.

Keel משתמש בסדרת ניפוחים, אבל לאורך תת-יריעות חלקות בלבד. מתחילים ב- $B_1 = \underset{1,\dots,n}{\underset{\uparrow}{X_n}} \times \underset{1,2,3,n+1}{\underset{\uparrow}{X_4}}$

ומבצעים סדרה של ניפוחים אבל לאורך תת-יריעות רגולריות.

<u>תזכורת: מה זה ניפוח?</u> (blow up) משתמשים במספר הגדרות במקומות שונים.

1. מעבירים קווים דרך נקודה (נקודות במרחב החדש הן זוגות: נקודה של מרחב הקודם וישר שעובר דרכה). הניסוח הזה לא ניתן לשכלול לתת-יריעה.
2. אפשר לרשום את הכול בקואורדינאטות ולהוסיף שני העתקים של קואורדינאטות. הסט השני לא מתאפס בו-זמנית אם הסט הראשון ויחסי לו.
3. $X \subset Y$, תת-יריעה של האפסים של אידיאל J. מוסיפים משתנה פורמאלי t.

יוצרים אלגברה מדורגת $\overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}} J^i t^i$. אפשר לראות אותה כאלגברת הפונקציות שמתאפסות על מרחב פרויקטיבי מסוים.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \subset & \widetilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \subset & Y \end{array}$$

4. $X \subset Y$ תת-סכמה נותרית. רוצים לייצר סכמה $\widetilde{Y}$ עם העתקה טבעית ל- Y שהיא איזומורפיזם בין $\widetilde{Y} \setminus \widetilde{X}$ לבין $Y \setminus X$, כאשר $\widetilde{X}$ תמונה הפוכה של X ובתוך ו- $\widetilde{X}$ הוא דיביזור Cartier בתוך $\widetilde{Y}$.
$\widetilde{Y}$ הוא אובייקט אוניברסאלי (מושך) בין כל האובייקטים מסוג הזה.

5. ניסוח שקול לסעיף הקודם להפוך את אלומת האידיאלים של X לאלומה הפיכה (invertible sheaf)

תחת ניפוח לכל תת-יריעה סגורה V ב-Y אפשר להגדיר תמונה מדויקת (strict transform). ההגדרה היא: מסתכלים על תמונה של $V \setminus X$ בתוך $\widetilde{Y}$ ולוקחים סגור למה שמתקבל.

משפט. אם $X \subset Y$ שיכון רגולרי, X,Y הם HI, אז גם $\widetilde{Y}$ הוא HI.

כמו כן, יש דרך מפורשת לחשב את חוג הקוהומולוגיות תחת ניפוח רגולרי.

לכן ברגע ש-Keel בונה את X_n בתור סדרה של ניפוחים רגולריים, הוא מקבל את HI במתנה, ומקבל גם דרך לחשב את קוהומולוגיות וגם את חוג צ'או שזה אותו דבר.

דיביזורים קיומיים לכל $T \subset \{1,2,...,n\}$ נגדיר D^T (לפעמים D_n^T) : כל העצים שבהם אפשר למצוא צומת כלשהו, שבו כל הנקודות של T נמצאים בצד אחד של הצומת, והנקודות של T^C בצידו השני.
נדרוש שני תנאים בשביל להגדיר (את I הדרוש תמיד, את II בד"כ).

$\boxed{\text{I}}$ $|T|,|T^C| \geq 2$

$\boxed{\text{II}}$ $|T \cap \{1,2,3\}| \leq 1$

תכונות פשוטות: תת-יריעה חלקה מקו-מימד 1, בצורה של $X_{|T|+1} \times X_{|T^C|+1}$.

חיתוכים נורמליים, נחתכים רק כאשר $T_1 \supset T_2$ או $T_2 \supset T_1$ או $T_2 \supset T_1^C$ או $T_1^C \supset T_2$.

סימון מקוצר לתנאי שאחד מ-4 תנאים מתקיים: $T_1 ** T_2$.

משפט. $$A^*(X_n) = \frac{\mathbb{Z}\left[D^T \,\middle|\, T \subset \{1,2,...,n\}, \boxed{\text{I}}\right]}{\text{(A),(B),(C)}}$$

(A) $D^T = D^{T^C}$ לכל T.

(B) $\sum_{\substack{T \\ i,k \in \\ j,l \notin}} D^T = \sum_{\substack{T \\ i,j \in \\ k,l \notin}} D^T$ לכל 4 אינדקסים i,j,k,l.

(C) $T_1 \cdot T_2 = 0$ אם לא $T_1 ** T_2$.

הבנייה של Keel: סדרת ניפוחים: $\underset{X_{n+1}}{\underset{=}{B_{n-2}}} \to \ldots \xrightarrow{b_3} B_3 \xrightarrow{b_2} B_2 \xrightarrow{b_1} \underset{X_n \times X_4}{\underset{=}{B_1}}$

סדרה של ניפוחים על התלכדויות, כלומר די ביזורים קיומיים שמקיימים $\boxed{\mathrm{I}}$, $\boxed{\mathrm{II}}$, שגודל משלים עולה כל פעם ב-1, ונקודה אחרונה n+1 כל הזמן במשלים.

קיימת העתקות טבעית

$$\pi_{1,2,3,i} = \phi_i : X_{n+1} \to X_4$$

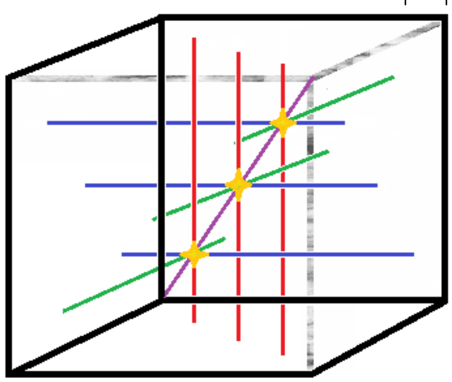
חתכים אוניברסאליים $\sigma^i : X_n \to X_{n+1}$

$$\pi_1 : X_{n+1} \to B_1$$
$$\sigma_1^i \to \pi_1 \circ \sigma^i$$

נגדיר תת-סכמות:

$$S_1^T = \sigma_1^i\left(D_n^T\right), \forall i \in T$$
$$S_{k+1}^T = strict\ b_k^{-1}\left(S_k^T\right), \forall \left|T^C\right| \geq k+2$$

הניפוח $B_{k+1} \xrightarrow{b_k} B_k$ מתבצע על הסכמות S_k^T עבור $\left|T^C\right| = k+1$.



דוגמאות נוספות: X_5 זה "מישור" $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ מנופח ב-3 נקודות על האלכסון.

X_6 זה $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ מנופח ב-3 נקודות ומספר ישרים. (ראה ציור.) בבנייה של Keel בהתחלה לפני תחילת התהליך הישרים האדומים כבר מנופחים, ואז קודם מנפחים בנקודות ואז ב-7 ישרים האחרים שהן לא נחתכים כי כבר מקודם ניפחנו את נקודות החיתוך שלהם.

מקור מידע עיקרי (כתוב ממש טוב):

Sean Keel, Intersection theory of moduli space of stable N-pointed curves of genus zero. Transactions of the American math. society, volume 330, number 2, April 1992.