פתרון תרגיל מס' 7

1 (א) $\neg A \lor \neg B \to \neg(A \land B)$

num.		*Rule*	*Assumptions*
1	$A \land B$	Ass.	1
2	A	1, $(\land E)$	1
3	$\neg A$	Ass.	3
4	$\neg(A \land B)$	2, 3, $(\neg I)$	3
5	B	1, $(\land E)$	1
6	$\neg B$	Ass.	6
7	$\neg(A \land B)$	5, 6, $(\neg I)$	6
8	$\neg A \lor \neg B$	Ass.	8
9	$\neg(A \land B)$	4, 7, 8, $(\lor E)$	8
10	$\neg A \lor \neg B \to \neg(A \land B)$	9, $(\to I)$	

(ב) $A \to (B \to A)$

num.		*Rule*	*Assumptions*
1	B	Ass.	1
2	A	Ass.	1,2
3	$(B \to A)$	2, $(\to I)$	2
4	$A \to (B \to A)$	3, $(\to I)$	

(ג) $A \to (A \lor B)$

num.		*Rule*	*Assumptions*
1	A	Ass.	1
2	$A \lor B$	1, $(\lor I)$	1
3	$A \to (A \lor B)$	2, $(\to I)$	

(ד) $((A \to C) \lor (B \to C)) \to (A \land B \to C)$

num.		*Rule*	*Assumptions*
1	$A \to C$	Ass.	1
2	$A \land B$	Ass.	2
3	A	2, $(\land E)$	2
4	C	1,3, $(\to E)$	1,2
5	$A \land B \to C$	4, $(\to I)$	1
6	$B \to C$	Ass.	6
7	B	2, $(\land E)$	2
8	C	6,7, $(\to E)$	6,2
9	$A \land B \to C$	8, $(\to I)$	6
10	$(A \to C) \lor (B \to C)$	Ass.	10
11	$A \land B \to C$	5,9,10, $(\lor E)$	10
12	$((A \to C) \lor (B \to C)) \to (A \land B \to C)$	11, $(\to I)$	

2 א) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\forall x(A \to B)$	Ass.	1
2	$A\{y/x\} \to B\{y/x\}$	$(*)$ 1, $(\forall E)$	1
3	$A\{y/x\}$	Ass.	3
4	$B\{y/x\}$	2,3, $(\to E)$	1,3
5	$\exists x B$	4, $(\exists I)$	1,3
6	$\exists x A$	Ass.	6
7	$\exists x B$	$(**)$ 5,6, $(\exists E)$	1,6
8	$\exists x A \to \exists x B$	7, $(\to I)$	1
9	$\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$	8, $(\to I)$	

$(*)$ - יש לבחור y משתנה חדש ולכן חופשי להצבה במקום x ב-A ו-B. כמו כן, שימו לב ש-$(A \to B)\{y/x\} = A\{y/x\} \to B\{y/x\}$.

$(**)$ - למה מותרת הפעלת הכלל?

ב) $\forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\forall x(A \to B)$	Ass.	1
2	$A\{y/x\} \to B\{y/x\}$	$(*)$ 1, $(\forall E)$	1
3	$\forall x A$	Ass.	3
4	$A\{y/x\}$	3, $(\forall E)$	3
5	$B\{y/x\}$	2,4, $(\to E)$	1,3
6	$\forall x B$	$(**)$ 5, $(\forall I)$	1,3
7	$\forall x A \to \forall x B$	6, $(\to I)$	1
8	$\forall x(A \to B) \to$ $(\forall x A \to \forall x B)$	7, $(\to I)$	

$(*)$ - יש לבחור y משתנה חדש ולכן חופשי להצבה במקום x ב-A ו-B. כמו כן, שימו לב ש-$(A \to B)\{y/x\} = A\{y/x\} \to B\{y/x\}$.

$(**)$ - למה מותרת הפעלת הכלל?

ג) $\neg \exists x A \to \forall x \neg A$

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\neg \exists x A$	Ass.	1
2	$A\{y/x\}$	$(*)$ Ass.	2
3	$\exists x A$	2, $(\exists I)$	2
4	$\neg A\{y/x\}$	1,3 $(\neg I)$	1
5	$\forall x \neg A$	$(**)$ 4, $(\forall I)$	1
6	$\neg \exists x A \to \forall x \neg A$	5, $(\to I)$	

$(*)$ - y חופשי להצבה במקום x ב-A.

$(**)$ - למה מותר להפעיל את הכלל?

ד) $\forall x \neg A \rightarrow \neg \exists x A$

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\forall x \neg A$	Ass.	1
2	$\neg A\{y/x\}$	$(*)$ 1, $(\forall E)$	1
3	$A\{y/x\}$	Ass.	3
4	$\neg \forall x \neg A$	2,3, $(\neg I)$	3
5	$\exists x A$	Ass.	5
6	$\neg \forall x \neg A$	4,5, $(\exists E)$	5
7	$\neg \exists x A$	1,6, $(\neg I)$	1
8	$\forall x \neg A \rightarrow \neg \exists x A$	7, $(\rightarrow I)$	

$(*)$ - y חופשי להצבה במקום x ב-A.

3 שפה:

סימני יחס:

- $P : i \rightarrow o$ - הכוונה היא ש-$x \in I[P]$ אמם x ראשוני.
- $F : i \times i \rightarrow o$ - הכוונה היא ש-$< x, y > \in I[F]$ אמם y מתחלק ממש ב-x.
- $L : i \times i \rightarrow o$ - הכוונה היא ש-$< x, y > \in I[L]$ אמם x קטן מ-y.

סימן פונקציה: $s : i \rightarrow i$ - הכוונה היא ש-$s(x) = y$ אמם y הוא העוקב של x.

הצרנה:

א) מספר אינו מתחלק ממש בעוקבו - $\psi_1 = \forall x \neg F(s(x), x)$

ב) גורם של מספר לא יכול להיות גורם של העוקב לאותו מספר (הערה: "X גורם של Y" מתפרש כאן "Y מתחלק ממש ב-X")
- $\psi_2 = \forall x \forall y [F(x, y) \rightarrow \neg F(x, s(y))]$

ג) כל מספר הוא ראשוני או מתחלק ממש באיזשהו מספר ראשוני
- $\psi_3 = \forall x [P(x) \vee \exists y [F(y, x) \wedge P(y)]]$

ד) בהינתן מספר אפשר למצוא מספר המתחלק ממש בכל המספרים הקטנים מהמספר הראשון - $\psi_4 = \forall x \exists y \forall z [L(z, x) \rightarrow F(z, y)]$.

ה) לכל מספר אפשר למצוא מספר ראשוני שאינו קטן ממנו
- $\psi_5 = \forall x \exists y [P(y) \wedge \neg L(y, x)]$

ו) כל מספר קטן מאיזשהו מספר ראשוני - $\psi_6 = \forall x \exists y [P(y) \wedge L(x, y)]$

ז) כל מספר הוא ראשוני או קטן מאיזשהו מספר ראשוני
- $\psi_7 = \forall x [P(x) \vee \exists y [P(y) \wedge L(x, y)]]$

נשים לב לדברים הבאים:

א) במבנה המספרים הטבעיים עם המובן הרגיל של "עוקב", "מתחלק", "ראשוני" ו-"קטן" כל הטענות הנ"ל נכונות.

ב) מהנתונים לא נובע $\neg(x < y) \rightarrow (x = y \vee y < x)$.

טענה ו' לא נובעת מטענות א'-ד'. דוגמא נגדית: $M =< D, I >$ כאשר:

$$D = \{a, b\}$$

$$I[L] = \emptyset,\ I[F] = \emptyset,\ I[P] = \{a, b\}$$

$$I[s] = \lambda x \in D.x$$

יש לוודא ש-M מספק את $\psi_1, ..., \psi_4$ אבל לא מספק את ψ_6.

טענה ז' לא נובעת מטענות א'-ד'. דוגמא נגדית: $M =< D, I >$ כאשר:

$$D = \{a, b, c\}$$

$$I[P] = \{a, c\}, I[F] = \{< a, b >\}, I[L] = \emptyset$$

$$I[s] = \lambda x \in D.c$$

כלומר עוקב של כל איבר במבנה הוא c. יש לוודא ש-M מספק את $\psi_1, ..., \psi_4$ אבל לא מספק את ψ_7.

טענה ה' נובעת לוגית מטענות א'-ד'. נרשום קודם איך תיראה ההוכחה בשפה טבעית:
יהי x מספר טבעי. $(*)$ לפי טענה ד' קיים מספר z שמתחלק ממש בכל מספר הקטן מ-x. נתבונן במספר $s(z)$. לפי ג' מתקיים או ש-$s(z)$ ראשוני או שקיים מספר ראשוני w שהוא גורם של $s(z)$.
אם $s(z)$ ראשוני, אז המספר המבוקש הוא $s(z)$. נראה כי אכן לא יתכן ש-$s(z)$ קטן מ-x. נניח בשלילה כי $s(z)$ הוא קטן מ-x. אז לפי $(*)$ $s(z)$ הוא גורם של z בסתירה לטענה א'.
אחרת קיים מספר ראשוני w שהוא גורם של $s(z)$. אז המספר המבוקש הוא w. נראה שלא ייתכן ש-w קטן מ-x. נניח בשלילה כי w קטן מ-x. אז לפי $(*)$ w הוא גורם של z. אך הוא גורם של $s(z)$ בסתירה ל-ב'.
בשני המקרים קיבלנו שקיים מספר ראשוני שאינו קטן מ-x.

כעת נרשום הוכחה בדדוקציה טבעית. מעתה נרשום $y < x$ במקום $L(y, x)$.

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\forall x \neg F(s(x), x)$	Ass	1
2	$\forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow \neg F(x, s(y)))$	Ass	2
3	$\forall x (P(x) \vee \exists y (P(y) \wedge F(y, x)))$	Ass	3
4	$\forall x \exists z \forall y (y < x \rightarrow F(y, z))$	Ass	4
5	$\exists z \forall y (y < x \rightarrow F(y, z))$	4, $(\forall E)$	4
6	$\forall y (y < x \rightarrow F(y, z))$	Ass	6
7	$P(s(z)) \vee \exists y (P(y) \wedge F(y, s(z)))$	3, $(\forall E)$	3
8	$P(s(z))$	Ass	8 $(first\ possibility\ from\ 7)$
9	$s(z) < x$	Ass	9 $(for\ contradiction)$
10	$s(z) < x \rightarrow F(s(z), z)$	6,$(\forall E)$	6
11	$F(s(z), z)$	9,10,$(\rightarrow E)$	6,9
12	$\neg F(s(z), z)$	1,$(\forall E)$	1
13	$\neg(s(z) < x)$	11,12,$(\neg I)$	1,6,$cont.\ to\ 9\ reached!$
14	$P(s(z)) \wedge \neg(s(z) < x)$	8,13,$(\wedge I)$	1,6,8
15	$\exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	14, $(\exists I)$	1,6,8
16	$\exists y (P(y) \wedge F(y, s(z)))$	Ass	16, $(second\ possibility\ from\ 7)$
17	$P(w) \wedge F(w, s(z))$	Ass	17
18	$P(w)$	17,$(\wedge E)$	17
19	$F(w, s(z))$	17,$(\wedge E)$	17
20	$\forall y (F(w, y) \rightarrow \neg F(w, s(y)))$	2,$(\forall E)$	2
21	$F(w, z) \rightarrow \neg F(w, s(z))$	20,$(\forall E)$	2
22	$w < x$	Ass	22, $(for\ contradiction)$
23	$w < x \rightarrow F(w, z)$	6,$(\forall E)$	6
24	$F(w, z)$	22,23,$(\rightarrow E)$	6,22
25	$\neg F(w, s(z))$	21,24,$(\rightarrow E)$	2,6,22
26	$\neg(w < x)$	19,25,$(\neg I)$	2,6,17,$cont.\ to\ 22\ reached!$
27	$P(w) \wedge \neg(w < x)$	18,26,$(\wedge I)$	2,6,17
28	$\exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	27,$(\exists I)$	2,6,17
29	$\exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	16,28,$(\exists E)$	2,6,16
30	$\exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	7,15,29,$(\vee E)$	1,2,3,6
31	$\exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	5,30,$(\exists E)$	1,2,3,4
32	$\forall x \exists y (P(y) \wedge \neg(y < x))$	32,$(\forall I)$	1,2,3,4