לוגיקה למדעי המחשב - תרגול 1

הצרנה

1. בוחרים סימון לכל טענה אטומית.
2. מתרגמים מילות קישור (וגם, או, לכן, אם ורק אם וכו') לקשרים ($\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$).

דוגמא:

טיעון:

- אם יש משחק כדורגל או משחק כדורסל, ליוסי יש מצב רוח טוב.
- יוסי צועק על אשתו רק אם הוא מצוברח.
- היום יוסי צעק על אשתו.

לכן אין היום משחק כדורגל וגם אין היום משחק כדורסל.

הצרנה:

1. - יש משחק כדורגל - f
   - יש משחק כדורסל - b
   - יוסי במצב רוח טוב - h
   - יוסי צועק על אשתו - a
2. $(f \vee b) \rightarrow h, \quad a \rightarrow \neg h, \quad a \quad \vdash \quad \neg f \wedge \neg b$

הוכחה באינדוקציה על מבנה הפסוק

רוצים להוכיח שבכל פסוק $A \in \mathbb{P}$ מתקיימת איזושהי תכונה Q.

1. בסיס: מראים ש-Q מתקיימת לפסוק אטומי.
2. הנחת האינדוקציה: מניחים כי $A, B \in \mathbb{P}$ מסויימים מקיימים את Q.
3. מוכיחים ש- $\neg A$ ו-$(A \circ B)$ מקיימים את Q לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

דוגמא:

טענה:

בכל פסוק $A \in \mathbb{P}$, בין כל שני אטומים מופיע קשר.

הוכחה:

1. בסיס: $A = p$ כאשר p אטום. אין ב-A שני אטומים והטענה מתקיימת לגבי A בצורה ריקה.
2. הנחת האינדוקציה: $B, C \in \mathbb{P}$ שמקיימים את התכונה.
3. (א) $A = \neg B$. אם ב-A אין שני אטומים, הטענה מתקיימת לגבי A בצורה ריקה. נניח אם כן כי p_1, p_2 שני אטומים ב-A. לפי מבנה A, האטומים של A הם גם האטומים של B אבל לפי הנחת האינדוקציה, הטענה מתקיימת לגבי B, כלומר בין p_1 ו-p_2 מופיע קשר.

   (ב) $A = (B \circ C)$ כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. אם ב-$A$ אין שני אטומים, הטענה מתקיימת לגבי A בצורה ריקה. נניח אם כן כי p_1, p_2 שני אטומים ב-A. לפי מבנה A ישנם 2 מקרים אפשריים:

   i. p_1 ו-p_2 שניהם ב-B או שניהם ב-C. לפי הנחת האינדוקציה, אז, מופיע בינהם קשר.

   ii. (p_1 ב-B ו-p_2 ב-C) או (p_1 ב-C ו-p_2 ב-B). הקשר $\circ$ נמצא אז בין p_1 ל-p_2.

   כלומר, בכל מקרה, הטענה מתקיימת לגבי A.

לכן, באינדוקציה, הטענה מתקיימת לגבי כל $A \in \mathbb{P}$.