לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 10

סקולמיזציה, משפט הרברנד ושימושיו

נאמר שלפסוק A (תורה T) בשפה L יש מודל הרברנד אם קיים מבנה הרברנד עבור L שמספק את A (T).

תרגיל 1: הוכח או הפרך: לכל פסוק ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל הרברנד $M =< H(L), I >$.

לא נכון, והדוגמא הנגדית: בהינתן שפה L בעלת סיגנטורה שכוללת קבוע c וסימן יחס p בלבד, הפסוק $\exists x(p(x) \wedge \neg p(c))$ ספיק, אבל אין לו מודל הרברנד.

הטענה המתוקנת: לכל פסוק אוניברסלי ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל הרברנד.
הוכחה: יהי A פסוק אוניברסלי ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד. אז לפי משפט הרברנד, קבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצה של A ספיקה במובן CPL. בהינתן השמה פסוקית v שמספקת אותה, נבנה מודל הרברנד $M =< H(L), I >$ עבור A באופן הבא:

$$v[p(s_1, ..., s_n)] = t \Leftrightarrow < s_1, ..., s_n > \in I[p]$$

יש לבדוק שזהו אכן מודל של A.

הכללת הטענה: אם לתורה של פסוקים אוניברסליים T בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל אז יש לה מודל הרברנד.

על מנת להשתמש במשפט הרברנד בשביל לבדוק ספיקות של תורה של פסוקים, נבצע שלושה שלבים:

1. מעבר לצורה פרינקסית נורמלית ע"י שקילויות לוגיות (נקבל תורה שקולה לוגית)
2. מעבר לתורה אוניברסלית ע"י סקולמיזציה (לא שקול לוגית, אבל משמר ספי-קות)
3. מעבר לשאלת ספיקות בתחשיב הפסוקים ע"י שימוש במשפט הרברנד

<u>תרגיל 2:</u> השתמש במשפט הרברנד להראות שמתקיים

$$\vdash_{FOL} \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \to \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$$

שיטה א' (לא יעילה):

נדאג כבר בהתחלה שכל הכמתים יהיו על משתנים שונים - בעזרת כלל α (יש לבדוק שכל התנאים להפעלתו מתקיימים):

$$\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \to \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x) \equiv \underbrace{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \to \forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')}_{\varphi_1}$$

$\vdash_{FOL} \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = \neg\varphi_1$ אינה ספיקה

נמצא צורה פרנקסית נורמלית ל-φ_2:

$$\varphi_2 = \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \to \forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')) \equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \neg\forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')$$

$$\equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\neg\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x') \equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\exists x'\neg\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')$$

$$\equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\exists x'\forall\delta'\neg p(\epsilon',\delta',x') \equiv \underbrace{\exists\epsilon'\exists x'\forall\epsilon\forall\delta'\exists\delta\forall x(p(\epsilon,\delta,x) \wedge \neg p(\epsilon',\delta',x'))}_{\varphi_3}$$

כעת נבצע סקולמיזציה של φ_3:

$$Sk(\varphi_3) = \forall\epsilon\forall\delta'\forall x(p(\epsilon,f(\epsilon,\delta'),x) \wedge \neg p(a,\delta',b))$$

לפי משפט הרברנד, $Sk(\varphi_3)$ ספיקה אמם T^* - קבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצה של $Sk(\varphi_3)$ ספיקה. מרחב הרברנד:

$$\{a,b,f(a,a),f(a,b),f(b,a),f(b,b),f(a,f(a,a)),...\}$$

$$T^* = \{p(a,f(a,a),a) \wedge \neg p(a,a,b), p(b,f(a,a),a) \wedge \neg p(a,a,b),...\}$$

הקבוצה T^* מכילה תת-קבוצה לא ספיקה:
$\{p(a,f(a,b),b) \wedge \neg p(a,b,b), p(a,f(a,f(a,b)),a) \wedge \neg p(a,f(a,b),b)\}$ עבור ההצבות $\{a/\epsilon, b/\delta', b/x\}$ ו-$\{a/\epsilon, f(a,b)/\delta', a/x\}$. לכן T^* אינה ספיקה.

שיטה ב' (יעילה יותר): $\vdash_{FOL} \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \to \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$ אמם
$\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \vdash_{FOL} \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$ אמם

$T = \{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x), \neg\forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)\}$ אינה ספיקה אמם
$Prenex(T) = \{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x), \exists\epsilon\exists x\forall\delta\neg p(\epsilon,\delta,x)\}$ אינה ספיקה אמם
$Sk(Prenex(T)) = \{\forall\epsilon\forall x p(\epsilon,f(\epsilon),x), \forall\delta\neg p(a,\delta,b)\}$ אינה ספיקה

מרחב הרברנד: $\{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b)),...\}$

קבוצת האינסטנציות הסגורות של איברי $Sk(Prenex(T))$:
$T^* = \{p(a,f(a),a), p(a,f(a),b), p(b,f(b),a), p(b,f(b),b),...\}\cup$
$\cup\{\neg p(a,a,b), \neg p(a,b,b), \neg p(a,f(a),b),...\}$

T^* מכילה תת-קבוצה לא ספיקה $\{p(a,f(a),b), \neg p(a,f(a),b)\}$ ולכן אינה ספיקה.

<u>תרגיל 3</u>: יהי A פסוק בשפה L מהצורה $\exists x_1\exists x_2...\exists x_n\psi$ כאשר ψ נוסחה ללא כמתים.
הוכח או הפרך: אם כל מבנה הרברנד עבור L מספק את A, אז A תקף לוגית.

הטענה נכונה. אם A ספיק על ידי כל מבנה הרברנד עבור L, אז $\neg A$ אינו ספיק על ידי אף מבנה הרברנד עבור L. מכיוון ש-$\neg A$ שקול לוגית לפסוק האוניברסלי $\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\neg\psi$, הוא אינו ספיק (משפט הרברנד!). אם $\neg A$ אינו ספיק אז A תקף לוגית.