

לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 9

מבנים ומבני הרברנד

למה 1: תהי g פונקציה מ- D ל- D' , אז לכל $b \in D$ מתקיים $(g \circ v)_{[x:=g(b)]} = g \circ (v_{[x:=b]})$.
 הוכחה: $(g \circ (v_{[x:=b]})) [y] = g(v_{[x:=b]} [y]) = \begin{cases} g(b) & x = y \\ g(v[y]) & \text{אחרת} \end{cases} = (g \circ v)_{[x:=g(b)]} [y]$.
 תרגיל 1 (שאלה ממבחן): נתונה שפה מסדר ראשון בעלת סיגנטורה הכוללת רק n סימני יחס חד מקומיים p_1, \dots, p_n .

(א) בהינתן מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור L , נגדיר יחס \sim^M על D באופן הבא:

$$b \in I[p_i] \Leftrightarrow a \in I[p_i] : 1 \leq i \leq n \text{ כאשר } a \sim^M b$$

הראה שלכל מבנה M עבור L , \sim^M הוא יחס שקילות בעל לכל היותר 2^n מחלקות שקילות.

(ב) נוסחה A בשפה L היא t -ספיקה אמ"ם קיים עבורה t -מודל בעל לכל היותר 2^n איברים.

הוכחה:

(א) יהי M מבנה.

נגדיר $\text{pred}(a) = \{p_i \mid a \in I[p_i], 1 \leq i \leq n\}$ אז לכל $a \in D$, נראה $a \sim^M b$ אצל $|\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_n\})| = 2^n$. אבל $\text{pred}(a) \subseteq \mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_n\})$ אמ"ם $\text{pred}(a) = \text{pred}(b)$ ולכן $a \sim^M b$ הוא יחס שקילות ולפי עקרון שובך היונים מספר המחלקות שקילות שלו הוא לכל היותר 2^n .

• נניח $a \sim^M b$ אז:

$$p_i \in \text{pred}(a) \Leftrightarrow a \in I[p_i] \Leftrightarrow b \in I[p_i] \Leftrightarrow p_i \in \text{pred}(b)$$

• נניח $\text{pred}(a) = \text{pred}(b)$ אז:

$$a \in I[p_i] \Leftrightarrow p_i \in \text{pred}(a) \Leftrightarrow p_i \in \text{pred}(b) \Leftrightarrow b \in I[p_i]$$

(ב) \Rightarrow יהי v, M t -מודל ל- A בעל לכל היותר 2^n איברים. בפרט הוא t -מודל של A ולכן היא t -ספיקה.

\Leftarrow לכל מבנה M נגדיר $\langle D^\sim, I^\sim \rangle = M^\sim$ בצורה הבאה:

תהי $g = \lambda d \in D. [d]_{\sim^M}$.

• $D^\sim = \{g(d) \mid d \in D\}$ (קבוצת מחלקות השקילות של \sim^M)

• $d \in I[p_i] \text{ אמ"ם } g(d) \in I^\sim[p_i]$

שימו לב, יש להוכיח ש- $I[p_i]$ מוגדרת היטב, כלומר שלכל $d, d' \in D$ כך

ש- $g(d) = g(d')$ מתקיים $d \in I[p_i] \text{ אמ"ם } d' \in I[p_i]$. הוכחה: $g(d) = g(d')$

לכן $d \sim^M d'$ לכן לפי הגדרה $d \in I[p_i] \text{ אמ"ם } d' \in I[p_i]$.

נוכח באינדוקציה על A שלכל השמה v ב- M מתקיים $M, v \models A$ אמ"ם
 $:M^\sim, g \circ v \models A$

• יהי $A = p_i(t)$

$M, v \models p_i(t) \Leftrightarrow v[t] \in I[p_i] \Leftrightarrow g(v[t]) \in I^\sim[p_i] \Leftrightarrow$
 $(g \circ v)[t] \in I^\sim[p_i] \Leftrightarrow M^\sim, g \circ v \models p_i(t)$

• קשרים: הראו לבד

• $M, v \models \forall x B : A = \forall x B$

אמ"ם לכל $d \in D$, $M, v_{[x:=d]} \models B$

אמ"ם (*) לכל $d \in D$, $M^\sim, g \circ (v_{[x:=d]}) \models B$

אמ"ם (**) לכל $d \in D$, $M^\sim, (g \circ v)_{[x:=g(d)]} \models B$

אמ"ם (***) לכל $d' \in D^\sim$, $M^\sim, (g \circ v)_{[x:=d']} \models B$

אמ"ם $M^\sim, g \circ v \models \forall x B$

(*) לפי הנחת האינדוקציה, למה (**), למה (***), היא פונקציה על.

• $A = \exists x B$: הראו לבד

אם A t -ספיקה, יהי M, v t -מודל של A , אז לפי הטענה $(g \circ v)$ M^\sim t -מודל של A . לפי סעיף א' ב- M^\sim יש לכל היותר 2^n איברים.

תרגיל 2: הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית את הטענות הבאות.

1. תהי L_1 שפה בסיגנטורה $\{p_1, p_2, p_3\}$ כאשר p_1, p_2, p_3 הם סימני יחס חד-מקומיים. קיימת נוסחה A ללא כמתים ב- L_1 , המקיימת:
 כל t -מודל של A מבוסס על מבנה בעל לפחות 5 איברים.

2. קיימת נוסחה B בשפה L_1 מהסעיף הקודם, המקיימת: כל v -מודל של B מבוסס על מבנה בעל לפחות 5 איברים.

הוכחה:

$A = p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge$
 $p_1(y) \wedge p_2(y) \wedge \neg p_3(y) \wedge$
 $p_1(z) \wedge \neg p_2(z) \wedge p_3(z) \wedge$
 $p_1(u) \wedge \neg p_2(u) \wedge \neg p_3(u) \wedge$
 $\neg p_1(w) \wedge p_2(w) \wedge p_3(w)$

1. תהי

יהי $M = \langle D, I \rangle, v$ t -מודל של A , צ"ל $|D| \geq 5$.
 לפי מבנה הנוסחה מתקיים $M, v \models p_1(x)$, $M, v \models p_2(x)$, $M, v \models p_3(x)$, וכו'.
 נשים לב שלכל שני משתנים חופשיים שונים l, m בנוסחה A מתקיים שקיים i כך $M, v \models p_i(l)$ ו- $M, v \models \neg p_i(m)$ (או להפך). כלומר $M, v \not\models p_i(m)$. לכן $v[l] \in I[p_i]$ ו- $v[m] \notin I[p_i]$. לכן $v[l] \neq v[m]$. כלומר ההשמה v חייבת לתת איברים שונים לכל אחד מהמשתנים החופשיים בנוסחה.

2. יהי $M = \langle D, I \rangle, v$ v -מודל של A , צ"ל $|D| \geq 5$.
 תהי v השמה כך ש- $M, v \models B$, לכן קיימת השמה v' כך ש- $M, v' \models A$ לכן לפי סעיף 1, $|D| \geq 5$.

תרגיל 3: הוכח/הפוך קיימת נוסחה ספיקה במילון ללא סימני פונציה וקבועים שאינה ספיקה באף מבנה אינסופי.

הפרכה: נניח בשלילה שקיימת A כזאת. לכל מבנה $M = \langle D, I \rangle$, ניקח
 $M^* = \langle D^*, I^* \rangle$ נגדיר מבנה חדש $A_{\mathbb{N}} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ כאשר $A_{\mathbb{N}} \cap D = \emptyset$. יהי $a \in D$. נגדיר מבנה חדש
 בצורה הבאה: $D^* = D \cup A_{\mathbb{N}}$.
 לכל סימן יחס p , $\langle g(b_1), \dots, g(b_n) \rangle \in I[p] \Leftrightarrow \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in I^*[p]$,
 כאשר $g : D^* \rightarrow D$ מוגדרת על ידי

$$g(b) = \begin{cases} b & b \in D \\ a & \text{אחרת} \end{cases}$$

טענת עזר: לכל השמה v ב- M^* ולכל נוסחה A מתקיים $M^*, v \models A \Leftrightarrow M, g \circ v \models A$
 הוכחה באינדוקציה על מבנה A :

• $A = p(x_1, \dots, x_n)$ (שימו לב - בשפה אין קבועים וסימני פונקציה, לכן הארגומן-
 נטים לסימן יחס הם בהכרח משתנים)

$$\begin{aligned} M^*, v \models p(x_1, \dots, x_n) &\Leftrightarrow \\ \langle v[x_1], \dots, v[x_n] \rangle \in I^*[p] &\Leftrightarrow \\ \langle g(v[x_1]), \dots, g(v[x_n]) \rangle \in I[p] &\Leftrightarrow \\ \langle (g \circ v)[x_1], \dots, (g \circ v)[x_n] \rangle \in I[p] &\Leftrightarrow \\ M, g \circ v \models p(x_1, \dots, x_n) & \end{aligned}$$

• קשרים - הראו לבד.

- $A = \forall x B$ - נניח $M^*, v \models \forall x B$ אמ"ם
 לכל $M^*, v_{[x:=d^*]} \models B, d^* \in D^*$ אמ"ם (*)
- לכל $M, g \circ v_{[x:=d^*]} \models B, d^* \in D^*$ אמ"ם (**)
- לכל $M, (g \circ v)_{[x:=g(d^*)]} \models B, d^* \in D^*$ אמ"ם (***)
- לכל $M, (g \circ v)_{[x:=d]} \models B, d \in D$ אמ"ם
- $M, g \circ v \models \forall x B$

(*) - לפי הנחת האינדוקציה, (**) - למה 1, (***) היא פונקציה על.

יהי $M = \langle D, I \rangle$ מבנה ו- v השמה כך ש- $M, v \models A$.
 הטווח של v הוא ב- D לכן $(g \circ v)[x] = g(v[x]) = v[x]$ ולכן $M, g \circ v \models A$. נבנה את M^*
 כמתואר למעלה. $D \subseteq D^*$ ולכן v היא גם השמה ב- M^* . ולכן לפי טענת $M^*, v \models A$.
 אבל M^* אינסופי בסתירה להנחה. לכן לא קיימת נוסחה כנדרש בשאלה.

הגדרה: תהי L שפה עם סיגנטורה σ שיש בה קבוע אחד לפחות. מרחב הרברנד על L ($H(L)$) הוא קבוצת שמות העצם הסגורים של L (ש"ס - שם עצם סגור).

הגדרה: מבנה הרברנד עבור שפה L עם קבוע הוא מבנה $M = \langle H(L), I \rangle$ שבו:

$$I[c] = c \bullet$$

• אם f סימן פונקציה n -מקומי של L אז

$$I[f] = \lambda x_1 \in H(L), \dots, x_n \in H(L). f(x_1, \dots, x_n)$$

שימו לב שהדבר היחיד שיש לבחור עבור מבנה הרברנד הוא את האינטרפרטציה של סימני יחס כלומר לכל סימן יחס n -מקומי p איזה ש"ס t_1, \dots, t_n מקיימים $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in I[p]$.

תרגיל 4: יהי $M = \langle H(L), I \rangle$ מבנה הרברנד עבור שפה L , v השמה במבנה. אז $M, v \models \forall x \varphi$ אם ורק אם לכל ש"ס (שם עצם סגור) s מתקיים $M, v \models \varphi\{s/x\}$. הוכחה:

(\Leftarrow) נניח $M, v \models \forall x \varphi$. יהי s ש"ס, לכן s חופשי להצבה במקום x ב- φ . מההנחה נובע $M, v_{[x:=v[s]]} \models \varphi$ (ו- x ווריאנט של v) לכן לפי משפט ההצבה $M, v \models \varphi\{s/x\}$ (חופשי להצבה במקום x ב- φ). שימו לב שזה נכון לכל מבנה M ולא רק מבנה הרברנד.

(\Rightarrow) נניח $M, v \models \varphi\{s/x\}$ לכל ש"ס s . בהרצאה הוכחנו את הטענה הבאה עבור מבנה הרברנד M :

$$M, v \models \varphi \Leftrightarrow M, v \models \varphi\{v[x]/x\}$$

תהי $v' = v_{[x:=s]}$, אז $M, v' \models \varphi$ אם $M, v' \models \varphi\{s/x\}$. מכיוון ש- s ש"ס, x איננו משתנה חופשי של $\varphi\{s/x\}$ ולכן $M, v' \models \varphi\{s/x\}$ אם $M, v \models \varphi\{s/x\}$. כלומר $M, v' \models \varphi$ אם $M, v \models \varphi\{s/x\}$. מההנחה נובע ש- φ לכל v' ו- x ואריאנט של v ולכן $M, v \models \forall x \varphi$.