

סמסטר ב', מועד דוגמה, תשע"א
 תאריך הבחינה: 2011
 מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
 בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

יהיו X, Y מ"מ, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(X) \leq 1$, $\text{Var}(Y) \leq 1$. הוכיחו ש-

$$\left| \mathbb{E} \left(\sin \frac{X}{10} \right) - \mathbb{E} \left(\sin \frac{Y}{10} \right) \right| \leq \frac{1}{100}.$$

שאלה 2

=35

יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות אחידה ב- $(0, 1)$. החציון של מדגם M_{2n+1} מקיים

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \text{sign}(X_k - M_{2n+1}) = 0$$

כמעט בטוח. הוכיחו ש-

$$M_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

כמעט בטוח, כאשר $n \rightarrow \infty$.

רמז: השתמשו בפונקציה מצטברת של מדגם, $F_n(\cdot)$.

שאלה 3

=35

יהי $(M_n)_n$ מרטינגל, $\mathbb{E}(M_n^-) \leq 1$ לכל n . הוכיחו ש-

$$\mathbb{P} \left(\liminf_n M_n < 100, \limsup_n M_n > 110 \right) \leq \frac{1}{10}.$$

רמז:
$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) \leq \frac{a\mathbb{P}(\sigma_k < \infty) + 1}{b}$$

שאלה 4

=35

יהי $(Z_n)_n$ תהליך הסתעפות פשוט עם פרמטר $p = 1/2$. הוכיחו ש-

$$\frac{1}{16} \leq \mathbb{P}(\exists n Z_n \geq 10) \leq \frac{1}{10}.$$

