

סמסטר א', מועד ב', תשע"ו
תאריך הבחינה: 04.09.2016
מספר קורס: 0366-2106

בחינה בפונקציות ממשיות המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

תהי μ התפלגות אחידה בכדור $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, כלומר,
 $V_n = m_n(B)$ כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$ לכל קבוצת בורל $\mu(A) = \frac{1}{V_n} m_n(A \cap B)$
נתבונן בהעתקה $\varphi : B \rightarrow (-1, 1)$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1$.
הוכיחו כי $\varphi_*(\mu) = f \cdot m_1$ כאשר $f(u) = \frac{V_{n-1}}{V_n} (1 - u^2)^{(n-1)/2}$.

שאלה 2

=35

יהי (X, S, μ) מרחב מידה, $f : X \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה מדידה. נגדיר פונקציה
 $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ ע"י

$$g(p) = \int_X f^p d\mu.$$

נניח כי g סופית בקטע נתון $(a, b) \subset \mathbb{R}$.
הוכיחו כי

(א) g רציפה ב- (a, b) ;

.....
(ב) g גזירה אינסוף פעמים ב- (a, b) ;

.....
(ג) הפונקציה גמה,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx,$$

היא גזירה אינסוף פעמים ב- $(0, \infty)$.

שאלה 3

=35

(א) תהי μ מידה ב- \mathbb{R} כזאת ש-

10

$$\exists a \in (0, \infty) \quad \sup_x \mu([x - a, x + a]) < \infty;$$

הוכיחו כי

$$\forall a \in (0, \infty) \quad \sup_x \mu([x - a, x + a]) < \infty.$$

.....
(ב) עבור μ שמקיימת (א) הוכיחו כי

25

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}) \quad \forall a \in (0, \infty) \quad (\mu * f)|_{[0, a]} \in L_1[0, a].$$

רמז ל-(ב): חלקו את \mathbb{R} לקטעים.

שאלה 4

=40

(א) יהי (X, S, μ) מרחב מידה, $\mathcal{E} \subset S$ אלגברה של קבוצות שיוצרת S , וקיימות $E_n \in \mathcal{E}$ כך ש- $\mu(E_n) < \infty$ ו- $\cup_n E_n = X$.
לכל $A \in S$ כך ש- $\mu(A) > 0$ הוכיחו כי

$$\exists E \in \mathcal{E} \quad \mu(E \cap A) > 0.9\mu(E).$$

.....
(ב) תהי μ מידה סופית מקומית ב- \mathbb{R}^d , $A \subset \mathbb{R}^d$ קבוצת בורל, $\mu(A) > 0$. הוכיחו כי קיימת תיבה $B \subset \mathbb{R}^d$ כך ש- $\mu(B \cap A) > 0.9\mu(B)$.
