

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ז, מועד א'
תאריך: 07.02.2017

מבחן סוף סמסטר ב"חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א"

המרצים: יולי אידלמן, יעקב יעקובוב, אלי להר

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על כל 5 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (21 נק') להוכיח למה קנטור על קטעים מוכלים (מקוננים): נתונות שתי סדרות (a_n)

ו- (b_n) המקיימות $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ונסמן ב- I_n את הקטע הסגור $I_n = [a_n, b_n]$.
נניח כי מתקיים

(1) הקטעים I_n הינם מקוננים, כלומר $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

אזי קיימת ויחידה נקודה המשותפת לכל הקטעים: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$

שאלה 2. (א) (10 נק') תהיה פונקציה f רציפה בקטע סגור $[0,1]$ ונניח כי $f(0) = f(1)$.

הוכיחו כי $\exists x_0 \in [0,1]$ עבורו $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{2})$.

(ב) (11 נק') נגדיר חיבור בין קבוצות מספרים ממשיים A ו- B ע"י

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. נניח כי A, B חסומים מלעיל. הוכיחו כי

$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

שאלה 3. (א) (10 נק') הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$

(ב) (11 נק') נניח כי פונקציה g מוגדרת על $[0, \infty)$ גזירה ברציפות, ונניח $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$

וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = K$ (הגבולות קיימים וסופיים). הוכיחו כי $K = 0$.

שאלה 4. (א) (11 נק') נתונה פונקציה $f(x) = (3x^2 + \cos(2x) + 5x^4 - 7) \cdot D(x)$, כאשר

$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ פונקצית דיריכלה. האם יש ל- f נקודת רציפות? הוכיחו.

(ב) (10 נק') אם $a_n \geq 0$ וקיים וסופי הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ו- (b_n) סדרה חסומה, הוכיחו כי

$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$

שאלה 5. (א) (13 נק') לאילו ערכים של $q > 0$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^q}$ מתכנס, ולאילו ערכים הוא מתבדר?

(ב) (8 נק') חשבו $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$