

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ז, מועד ב'
תאריך: 10.03.2017

מבחן סוף סמסטר ב"חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א"

המרצים: יולי אידלמן, יעקב יעקובוב, אלי להר

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על כל 5 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (21 נק') לתת הגדרות לפי קושי ולפי היינה של גבול של פונקציה בנקודה x_0 עבור פונקציה f המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה x_0 ולהוכיח שקילות של ההגדרות.

שאלה 2. (א) (10 נק') נתונות סדרות חסומות (a_n) ו- (b_n) . הוכיחו כי

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(ב) (11 נק') נתון זוג פונקציות $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. נניח ששתיהן רציפות ב- (a, b) .

הוכיחו כי גם פונקציה $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ רציפה ב- (a, b) .

שאלה 3. (א) (9 נק') נגדיר קבוצה A :

$A = \{x \in [1, 100] \mid \text{בפיתוח העשרוני של } x \text{ הספרות } 3 \text{ ו-} 9 \text{ וכל אחת מופיעה לפחות פעם אחת}\}$

האם קיימים $\min A, \sup A$? הוכיחו. במידה וקיימים – חישבו.

(ב) (12 נק') תהי f פונקציה גזירה בקטע $(-\delta, \delta)$, כאשר $\delta > 0$. ידוע כי

$f(0) = 0$ וכי הנגזרת $f'(x)$ רציפה ועולה בקטע. תהי (x_n) סדרה יורדת של נקודות

בקטע השואפת לאפס. הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} f'(x_n)$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ מתכנס.

רמז: הוכיחו ש- $f'(0) = 0$.

שאלה 4. (א) (9 נק') תהי (a_n) סדרה ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. הוכיחו כי קיימת תת-סדרה שלה (a_{n_k}) כך

שטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס.

(ב) (12 נק') נתונות שתי פונקציות f, g רציפות בנקודה $x = c$. נגדיר את הפונקציה

$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכיחו: רציפה ב- $x = c$ אם ורק אם $f(c) = g(c)$.

שאלה 5. (א) (13 נק') מהו רדיוס התכנסות וקטע התכנסות (לחקור גם קצוות של הקטע) של

טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2+1}}{(n+1)^{n^2}} x^n$?

(ב) (8 נק') חשבו $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan x}}$.