

# אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשע"ח, מועד א'  
תאריך: 06.07.2018

## מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

### מבנה הבחינה

- יש לענות על כל 4 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך  
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

**שאלה 1.** (25 נק') הוכיחו משפט טיילור עם שארית לגרנו: יהי  $I$  קטע פתוח ותהי  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה  $n+1$  פעמים ב- $I$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . יהי  $x_0 \in I$ ,  $P_n(x)$  פולינום טיילור מסדר  $n$  סביב  $x_0$  ו- $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$  השארית. אזי לכל  $x \in I$ ,  $x_0 \neq x$  קיים  $c_x$  בין  $x_0$  לבין  $x$  כך ש-  

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

**שאלה 2.** (א) (14 נק') תהי  $\{a_n\}$  סדרה כך ש- $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  גבולות חלקיים שלה. נניח שקיים גבול (סופי)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \alpha$ . הוכיחו שגם  $\alpha$  גבול חלקי של  $\{a_n\}$ .

(ב) (12 נק') נגדיר סדרה ע"י  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_{n+1} = \frac{3}{4-x_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . הוכיחו כי הסדרה  $\{x_n\}$  מתכנסת לגבול (סופי) וחשבו את גבולה.

**שאלה 3.** (א) (8 נק') בדקו התכנסות של הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$  כאשר  $v(n)$  - מספר הספרות של המספר  $n$ .

(ב) (10 נק') תהי פונקציה  $f$  גזירה בקטע פתוח  $(a, b)$  ולא חסומה שם. הוכיחו כי גם  $f'$  לא חסומה ב- $(a, b)$ .

(ג) (14 נק') תהי  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . הוכיחו כי קיימת סדרה  $c_n \rightarrow \infty$  שעבורה  $f'(c_n) \rightarrow 0$ .

רמז: הסבירו קודם שלכל סדרה  $x_n \rightarrow \infty$  מתקיים  $\frac{f(x_n) - f(x_1)}{x_n - x_1} \rightarrow 0$ .

**שאלה 4.** (א) (13 נק') מצאו לאילו ערכי  $x \in \mathbb{R}$  הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} (x-1)^n$  מתכנס, כאשר  $a > 0$  קבוע.

(ב) (9 נק') באליפסה המישורית  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a, b > 0$  תוחמים מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצאו השטח המקסימלי של מלבן כזה.