אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב׳ תשע״ח, מועד ב׳
תאריך: 02.08.2018

<u>מבחן סוף סמסטר ב״חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א״</u>

המרצה: פרופ׳ יעקב יעקובוב

<u>הנחיות</u>

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

<u>מבנה הבחינה</u>

- יש לענות על כל 4 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה 1</u>. (25 נק') הוכיחו משפט הסנדוויץ לסדרות: נתונות שלוש סדרות $(x_n),(y_n),(z_n)$ כך ש- $x_n \to L$ ו- $y_n \to L$, כאשר L מספר ממשי. נניח ש- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n > n_0$ מתקיים $x_n \le z_n \le y_n$. אזי גם $z_n \to L$. הערה: הוכיחו דרך הגדרת קושי לגבול של סדרה.

<u>שאלה 2</u>. (א) (14 נק') נתונות $A,B \subset \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. הוכיחו כי אם A,B חסומות מלעיל אז גם $A \bigcup B$ חסומה מלעיל ומתקיים $\sup(A \bigcup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ב) (12 נק') הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1+1}{1^2 \cdot 3^1} + \frac{2+1}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2 \cdot 3^n}$ מתכנסת (לגבול סופי).

<u>שאלה 3</u>. (א) (8 נק') בדקו התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ כאשר $\{\lambda_n\}$ השורשים החיוביים של המשוואה $\tan x = x$.

(ב) (10 נק') האם הפונקציה $f(x) = x \sin x$ רציפה במ"ש ב- $[0,\infty)$?

(ג) (14 נק') תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$ ו- $f(0) = f(1) = 0$.
נניח שקיים $A > 0$ כך ש- $|f''(x)| \le A, \quad \forall x \in (0,1)$. הוכיחו: $|f'(x)| < A/2, \quad \forall x \in (0,1)$.
רמז: תפתחו $f(x)$ לנוסחת טיילור.

<u>שאלה 4</u>. (א) (13 נק') מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{R}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 2^n}$ מתכנס.

(ב) (9 נק') הוכיחו שלכל $x, y \in [0,1]$ מתקיים $|x^2 \arctan x - y^2 \arctan y| \le \frac{1+\pi}{2}|x-y|$.