

מבחן בחדו"א 1א

מועד ב', סמסטר א' תש"ף, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, ד"ר ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל) מערך הסעיף או השאלה. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתירגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. (10 נק') תהא $B \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהיא ותהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \inf \{|x - b| : b \in B\}$. הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

ב. (17 נק') האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n - \sqrt{n^2 + n})}{n}$ מתכנס? הוכיחו.

2. (27 נק') הוכיחו את כלל השרשרת: תהי f מוגדרת בסביבה U של הנקודה x_0 ותהי g מוגדרת בסביבה V של הנקודה $f(x_0)$ כך ש- $f(U) \subset V$. נניח כי f גזירה בנקודה x_0 וכי g גזירה בנקודה $f(x_0)$. אז ההרכבה $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים ש-
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

3. ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת כי לכל $x \in (0, 1)$ $f(x) > 0$ וכי $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ אז יש $\epsilon > 0$ כך ש- f מונוטונית עולה ב- $(0, \epsilon)$.

ב. (17 נק') תהא $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים בתחום הגדרתה ומקיימת כי לכל $x \in (0, \infty)$ $f''(x) > 0$. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(2x) - f(x) < f(3x) - f(2x)$.

4. א. (10 נק') תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x) = f(x \cdot D(x))$ לכל $x \in \mathbb{R}$ כאשר $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקצית דיריכלה (כלומר $D(x) = 1$ כאשר $x \in \mathbb{Q}$ ו- $D(x) = 0$ אחרת). הוכיחו כי f היא פונקציה קבועה.
- ב. (17 נק') תהא $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(x) \geq c > 0$ לכל $x \in [0, \infty)$ עבור $c > 0$ כלשהוא. נניח כי $f(0) < 0$. הוכיחו כי קיים **ויחיד** $x \in [0, -f(0)/c]$ כך ש- $f(x) = 0$.

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):