

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תש"ף, מועד ב'
תאריך: 13.08.2020

מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') להוכיח את המשפט: נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n) ונניח כי קיימים

הגבולות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab \quad (\text{א})$$

$$\text{ב) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{בתנאי נוסף: } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ ו- } b \neq 0.$$

שאלה 2. נתונה סדרה (x_n) ע"י הנוסחה $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{32}{x_n^4} \right)$, $x_1 > 0$, $n = 1, 2, \dots$, ונתון כי $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(א) (4 נק') לחשב $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.

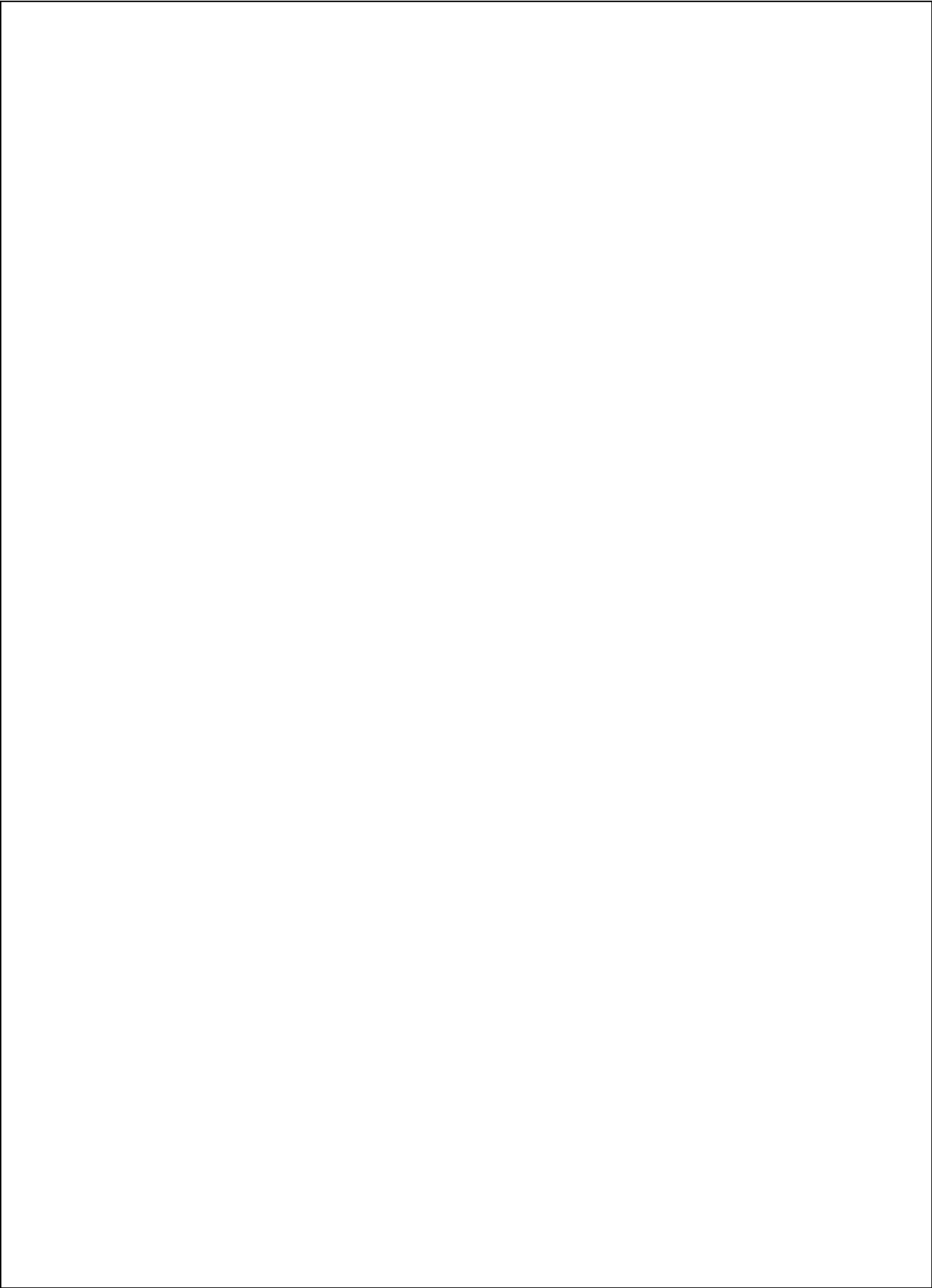
(ב) (8 נק') עבור פונקציה $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{32}{x^4} \right)$ להסביר כי $\exists \varepsilon > 0$ ו- $\exists q > 1$ כך ש-
 $|f'(x)| \geq q > 1, \forall x \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

(ג) (15 נק') להוכיח כי $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $x_n = L, \forall n \geq n_0$.

שאלה 3.

(א) (13 נק') נתונות שתי פונקציות $f(x), g(x)$ גזירות פעמיים ב- $\mathbb{R}$. הוכיחו כי אם $f''(x) > 0, g''(x) < 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, אז למשוואה $f(x) = g(x)$ יש לכל היותר שני פתרונות.

(ב) (14 נק') פונקציה $f(x)$ מוגדרת ב- $\mathbb{R}$, גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ גם כן מתכנס בהחלט.



שאלה 4. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $f(x) = (x + \alpha) \ln(1 + \frac{1}{x})$.

(א) (12 נק') הוכיחו כי f יורדת ב- $[1, \infty)$ עבור $\alpha = 1$.

(ב) (15 נק') יהי $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. הוכיחו כי $\exists M > 0$ כך ש- f עולה ב- $[M, \infty)$.

