

מבחן בחדו"א 1א

מועד ב', סמסטר א' תשפ"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, ד"ר ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל) מערך הסעיף או השאלה. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתירגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר.**

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. א. (14 נק') הוכיחו או הפריכו: כל פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a+n) = 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$ מקיימת ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

ב. (13 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{n^2}$.

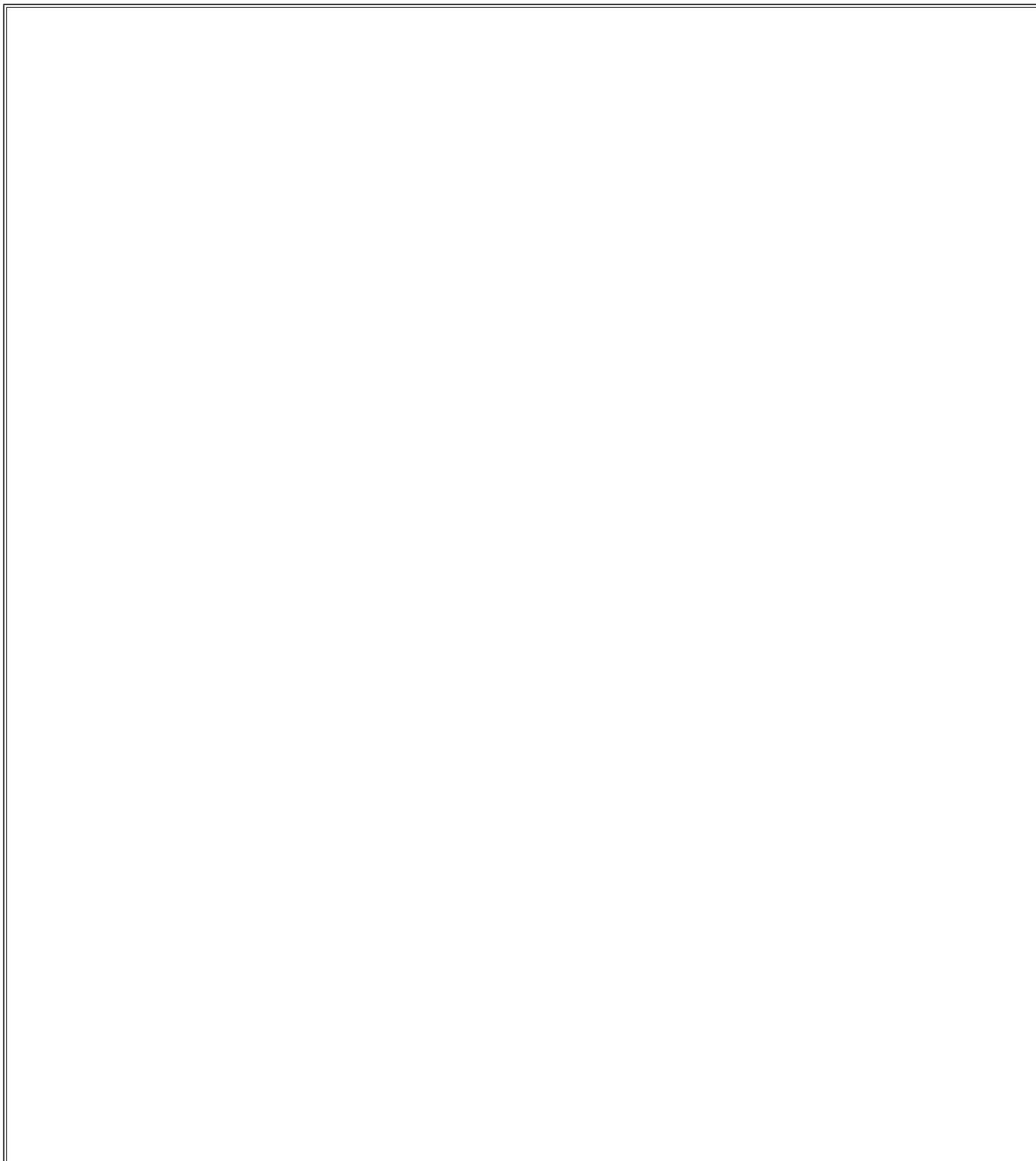
2. (נק' 27) הוכיחו את משפט וירשטראס: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אז f חסומה מלעיל ויש לה מקסימום, כלומר קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ עבורה $f(x) \leq f(x_0)$ לכל $x \in [a, b]$.

3. א. (13 נק') תהא $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(1) = f(-1)$ ותהא $\{a_n\}$ הסדרה $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}$. הוכיחו כי $\{f(a_n)\}$ מתכנסת.

ב. (14 נק') תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, חסומה מלעיל ונתון שקיימת ל- f נקודת מינימום גלובאלית. הוכיחו כי קיים $x \in \mathbb{R}$ בו $f''(x) = 0$.

4. א. (13 נק') נתונות פונקציות $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות פעמיים בכל $\mathbb{R}$ ומקיימות $f(0) = g(0)$ ו- $f'(0) = g'(0)$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (f(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{n}))$ מתכנס.

ב. (14 נק') תהא $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש- $f(0) = f(1)$. הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ טבעי קיים $x \in [0, 1]$ כך ש- $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.



במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):