

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"א, מועד א'
תאריך: 02.07.2021

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') להוכיח למה קנטור על קטעים מוכלים (מקוננים): נתונות שתי סדרות (a_n)

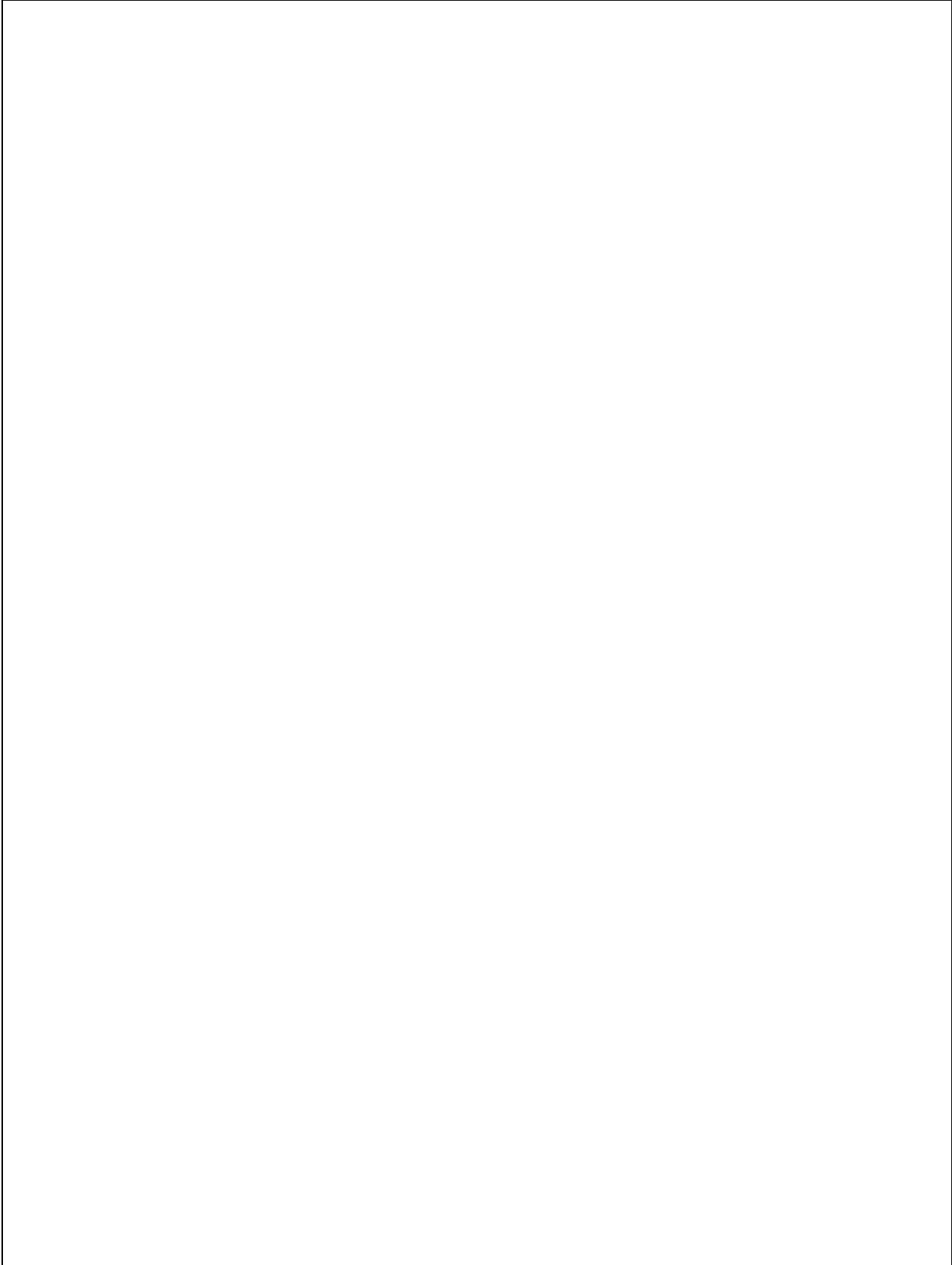
ו- (b_n) המקיימות $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ונסמן ב- I_n את הקטע הסגור $I_n = [a_n, b_n]$.

נניח כי מתקיים: (1) הקטעים I_n הינם מקוננים, כלומר $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. אזי קיימת ויחידה נקודה המשותפת לכל הקטעים: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

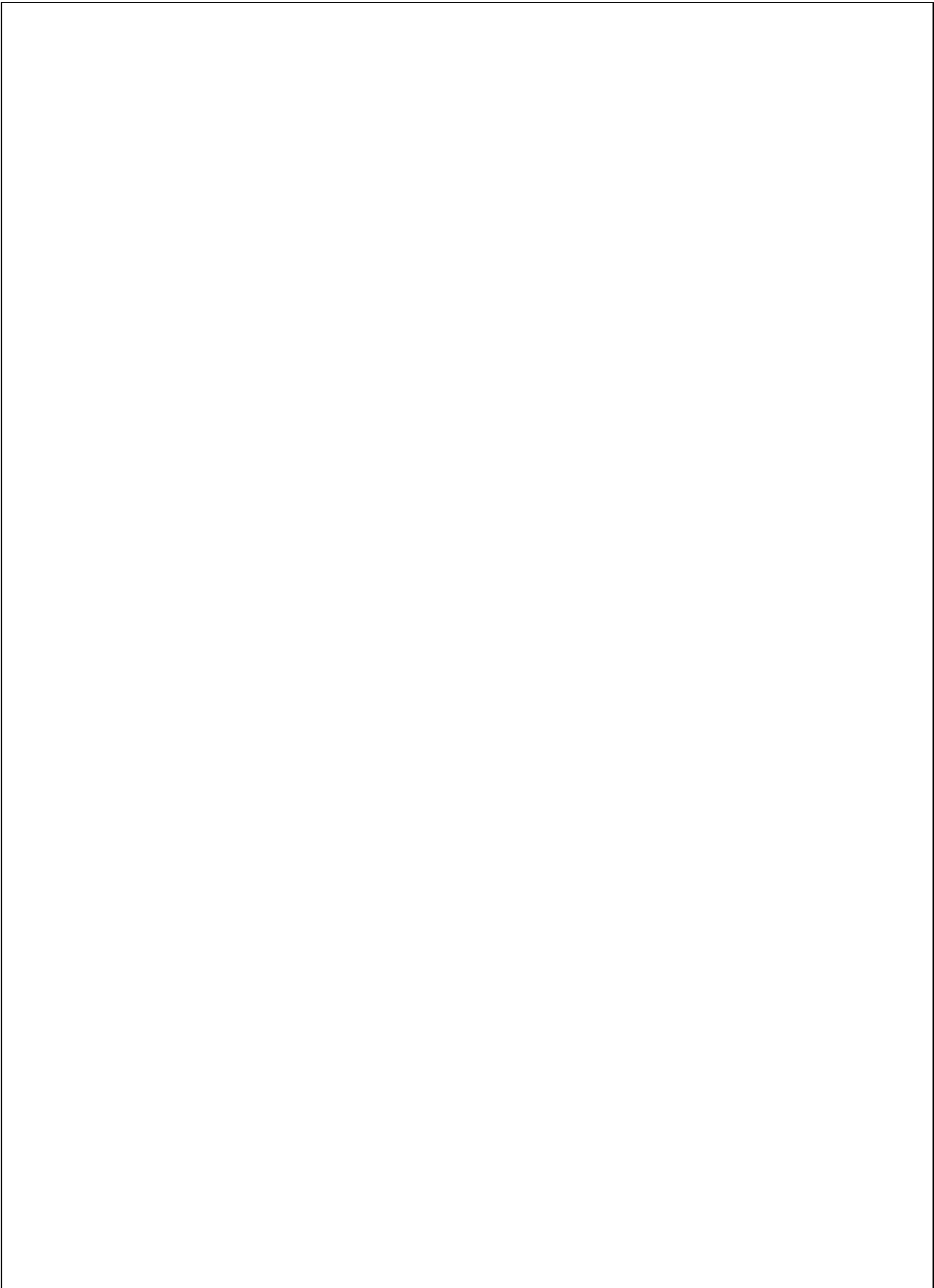
שאלה 2. (א) (13 נק') תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלמעלה וזרות (כלומר $A \cap B = \emptyset$). הוכיחו או הפריכו: $\sup A \neq \sup B$.

(ב) (14 נק') הוכיחו כי לכל סדרה (a_n) מתקיים (כולל מקרים שהגבולות יכולים להיות $+\infty$ או $-\infty$): $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$



שאלה 3. (א) (13 נק') הוכיחו כי למשוואה $3 \ln x - e^{-18} x^3 = 17$ יש פתרון יחיד ב- $(0, \infty)$.

(ב) (14 נק') נתונות פונקציות $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות ברציפות. נניח כי מתקיים $f(0) < g(0)$ ולכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים $f'(x) + (f(x))^2 < g'(x) + (g(x))^2$. הוכיחו כי לא קיים שום $x \in [0, \infty)$ עבורו $f(x) = g(x)$.
רמז: אם צריך, סמנו ב- $A = \{x \in [0, \infty) : f(x) = g(x)\}$ והוכיחו כי $A = \emptyset$.



שאלה 4. (א) (13 נק') תהי פונקציה ממשית f אי-שלילית וגזירה פעמיים בסביבת הנקודה 0. נתון כי $f(0) = 0$. הוכיחו כי $f''(0) \geq 0$.

(ב) (14 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה. הוכיחו שהפונקציה $f(x + 2021) - f(x)$ חסומה ב- \mathbb{R} .

