

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"א, מועד ב'
תאריך: 06.08.2021

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

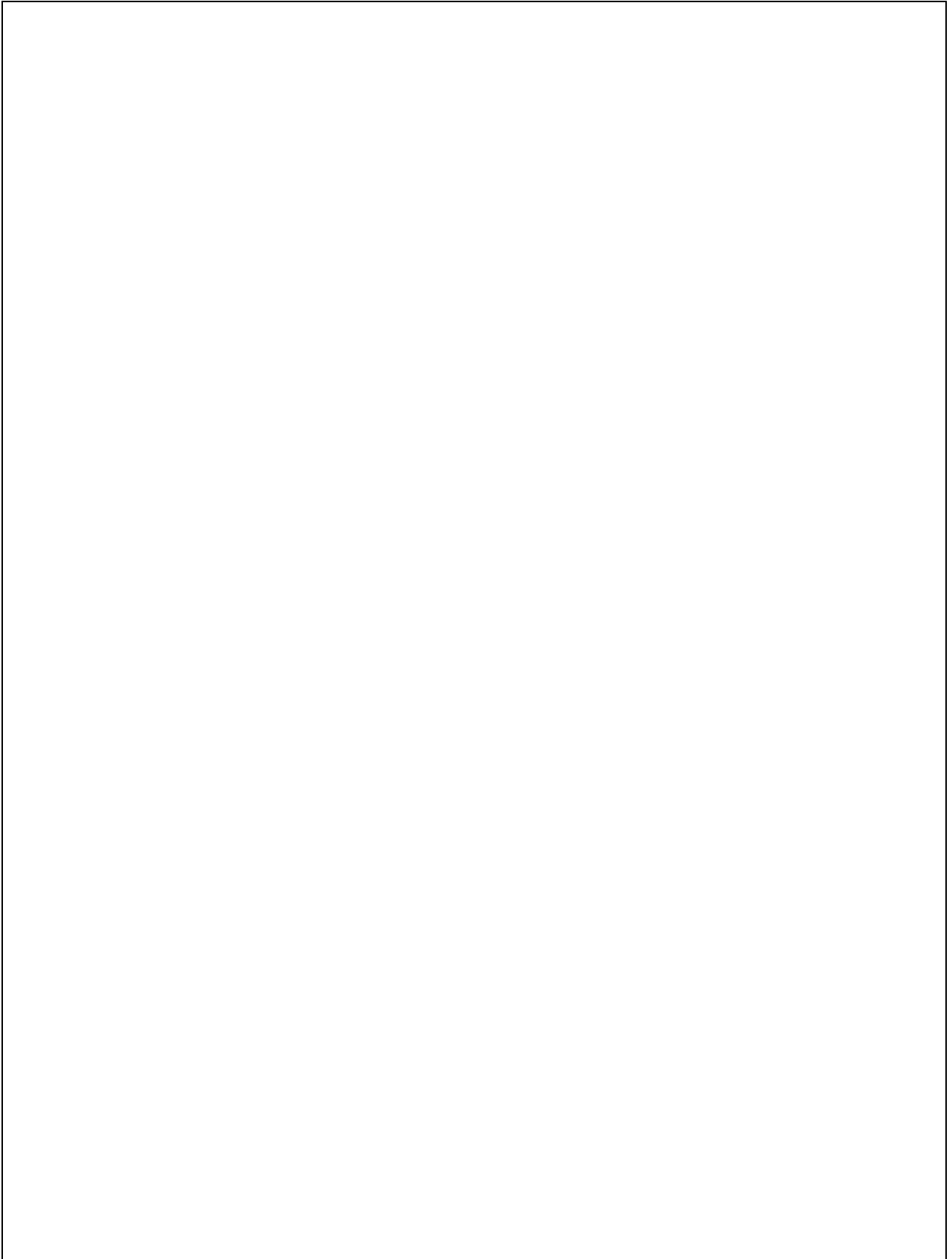
ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט הסנדוויץ' לסדרות: נתונות שלוש סדרות $(x_n), (y_n), (z_n)$ כך ש-
 $x_n \rightarrow L$ ו- $y_n \rightarrow L$, כאשר L מספר ממשי. נניח ש- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n > n_0$ מתקיים
 $x_n \leq z_n \leq y_n$. אזי גם $z_n \rightarrow L$. הערה: הוכיחו דרך הגדרת קושי לגבול של סדרה.

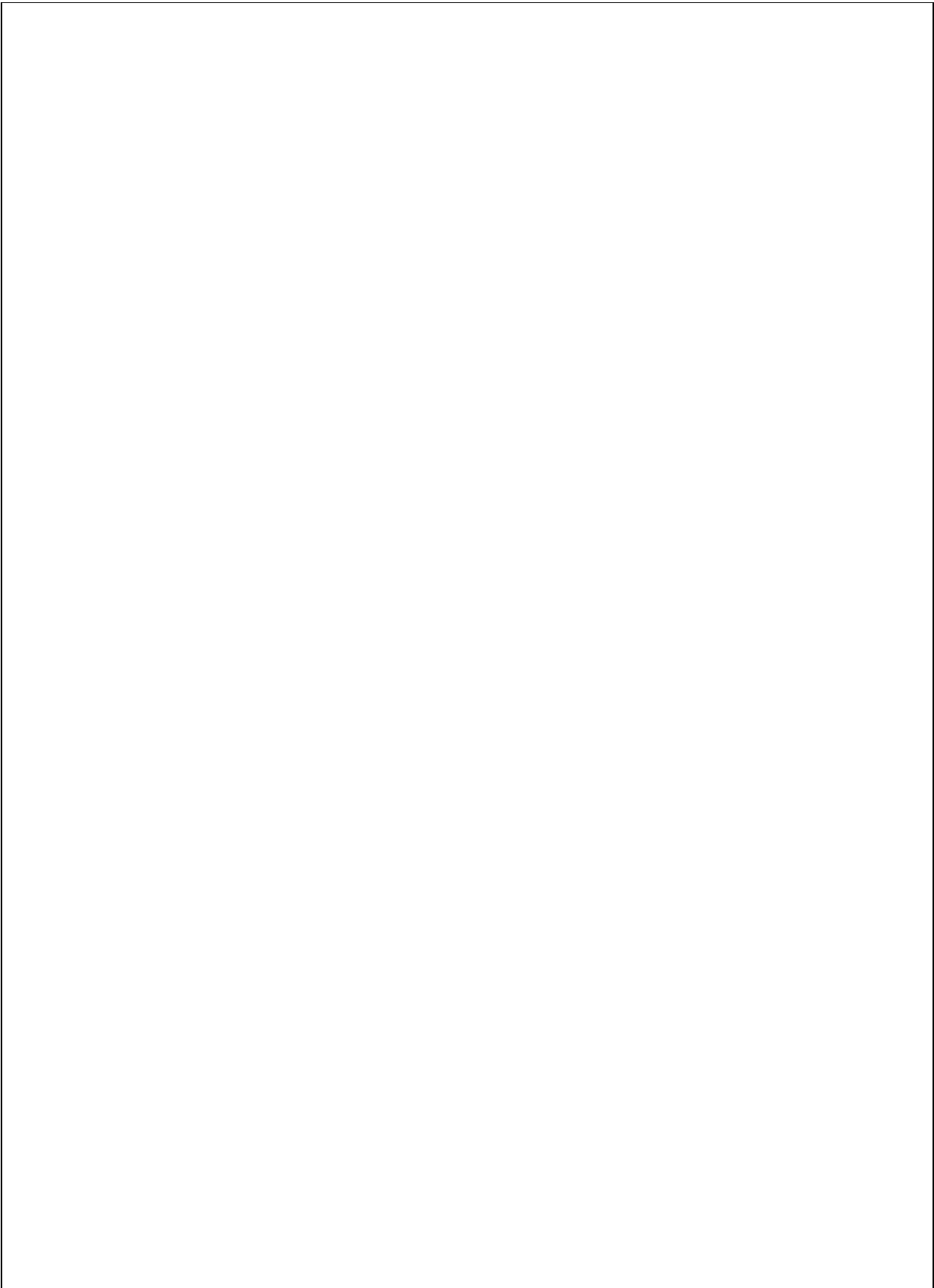
שאלה 2. (א) (נק' 13) תהי קבוצה $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה. הוכיחו כי $\exists \max A$ אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\sup A = \max A$.

(ב) (נק' 14) נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ המקיימים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי. הראו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ובעזרת הטענה, ולא בכל דרך אחרת, הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ מתכנס.



שאלה 3. (א) (13 נק') הפריכו ע"י דוגמא נגדית : נתונה פונקציה ממשית h רציפה ב-0 ו-
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = 0$. אזי הפונקציה גזירה פעמיים ב-0 ו- $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$.

(ב) (14 נק') נתונה פונקציה ממשית f שמוגדרת בסביבת הנקודה 0. נניח $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 וגם $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.



שאלה 4. (א) (13 נק') האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ מתכנס בהחלט? האם הוא מתכנס?

(ב) (14 נק') תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה. הוכיחו שהפונקציה $\frac{f(x)}{x}$ חסומה

ב- $[1, \infty)$. רמז: אם צריך, אפשר להשתמש, באיזשהו שלב, בעובדה פשוטה שלכל $\delta > 0$ ו- $x \in [1, \infty)$, ניתן לכתוב $x = 1 + n\delta + r$ עבור איזשהו $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו- $r \in [0, \delta)$.

