

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ב, מועד ב'
תאריך: 31.07.2022

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

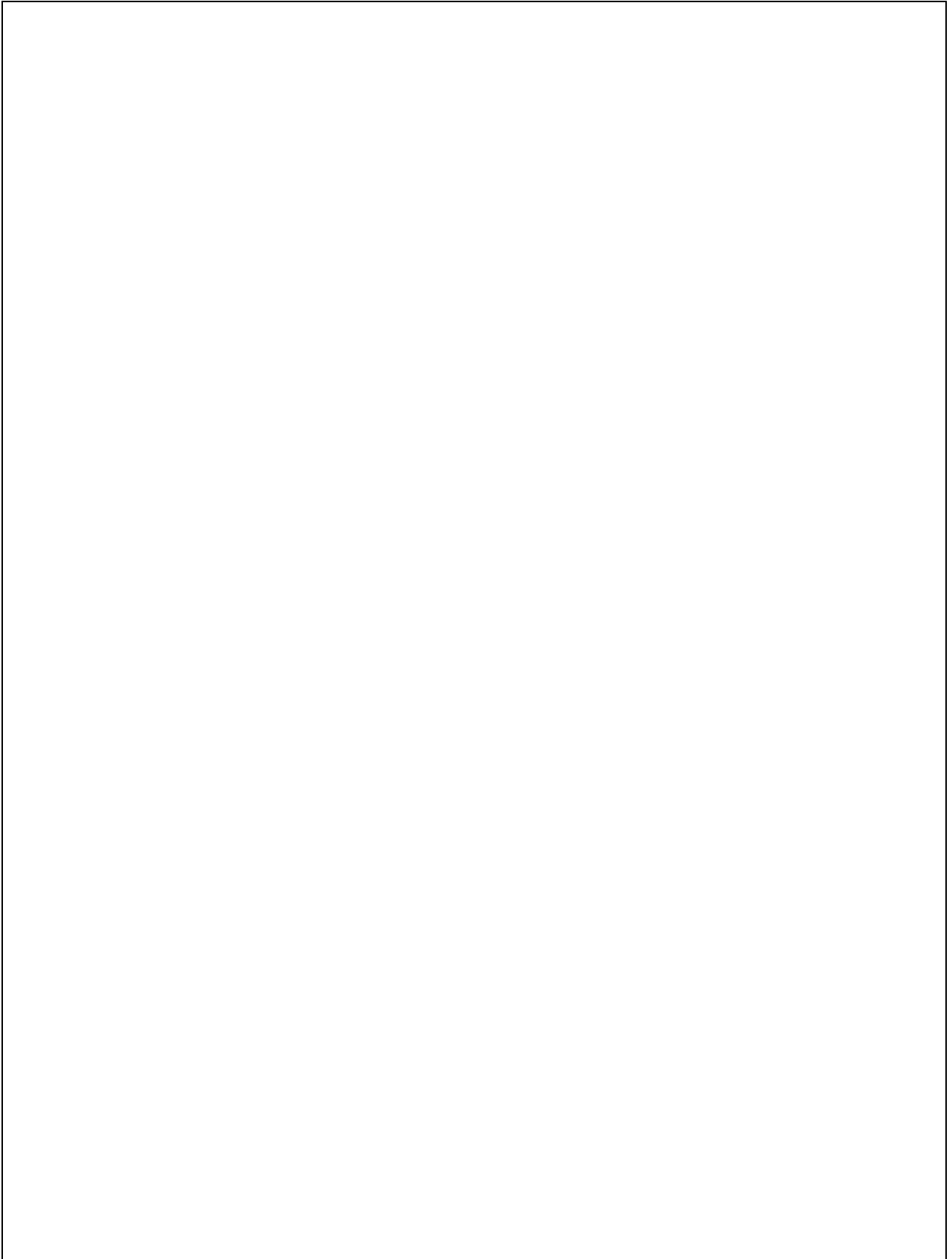
ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט רציפות של פונקציה הפוכה: יהי I קטע מוכלל ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית חזק. אזי $J = f(I)$ קטע מוכלל ומתקיים $f^{-1}: J \rightarrow I$ רציפה.
הערה: יש להוכיח במפורט רק רציפות של ההפוכה. קיום ההפוכה ו- J קטע מוכלל רק לצטט נכון מאיפה זה נובע.

שאלה 2. (א) (14 נק') תהי סדרה חסומה. נסמן $S_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. הוכיחו כי הסדרה (S_n) מתכנסת ומתקיים $\limsup a_n = \lim S_n$.

(ב) (13 נק') לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ מתכנס/מתבדר.

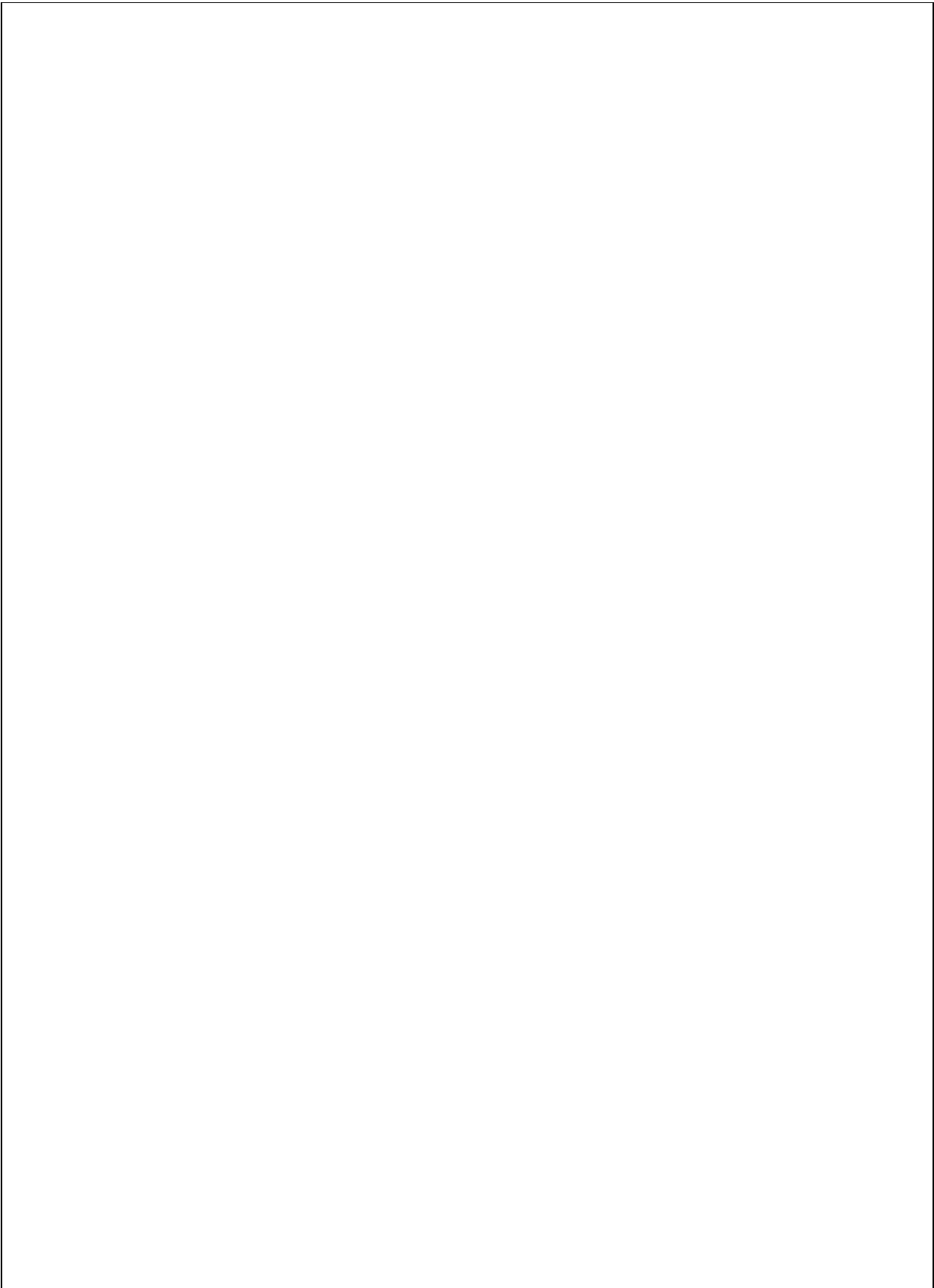


שאלה 3. (א) (14 נק') תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במ"ש ב- $[0, \infty)$, כך ש- $f(0) = 0$. הראו שקיימים קבועים $a, b \geq 0$ כך ש- $|f(x)| \leq ax + b$ לכל $x \in [0, \infty)$.

(ב) (13 נק') נתונה פונקציה $f(x) = (3x^2 + \cos(2x) + 5x^4 - 7) \cdot D(x)$, כאשר

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

האם יש ל- f נקודת רציפות? הוכיחו.



שאלה 4. (א) (13 נק') נניח כי פונקציה f מוגדרת על $(0, \infty)$, גזירה פעמיים, ונניח שהגבולות $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x)$ קיימים וסופיים. הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

(ב) (14 נק') מהם רדיוס ההתכנסות וקטע ההתכנסות (חקרו גם קצוות של הקטע)

$$\text{של טור חזקות } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2+1}}{(n+1)^{n^2}} x^n ?$$

