

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ג, מועד ב'
תאריך: 24.08.2023

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

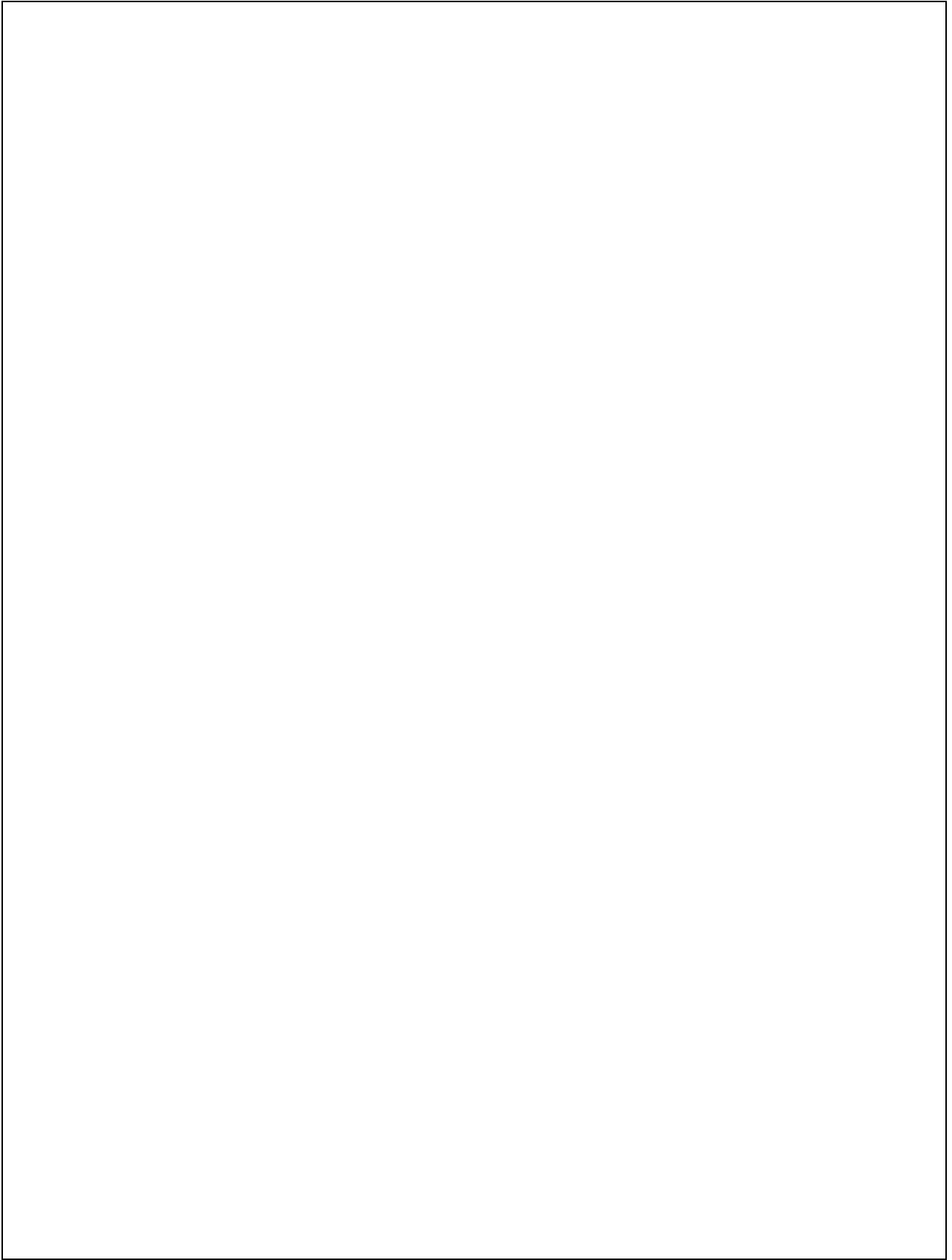
ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט על גבול של הרכבה של שתי פונקציות : נתונות שתי פונקציות
 $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$ ו- $g: J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ בסביבות המנוקבות בהתאמה. נניח כי
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ו- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$.

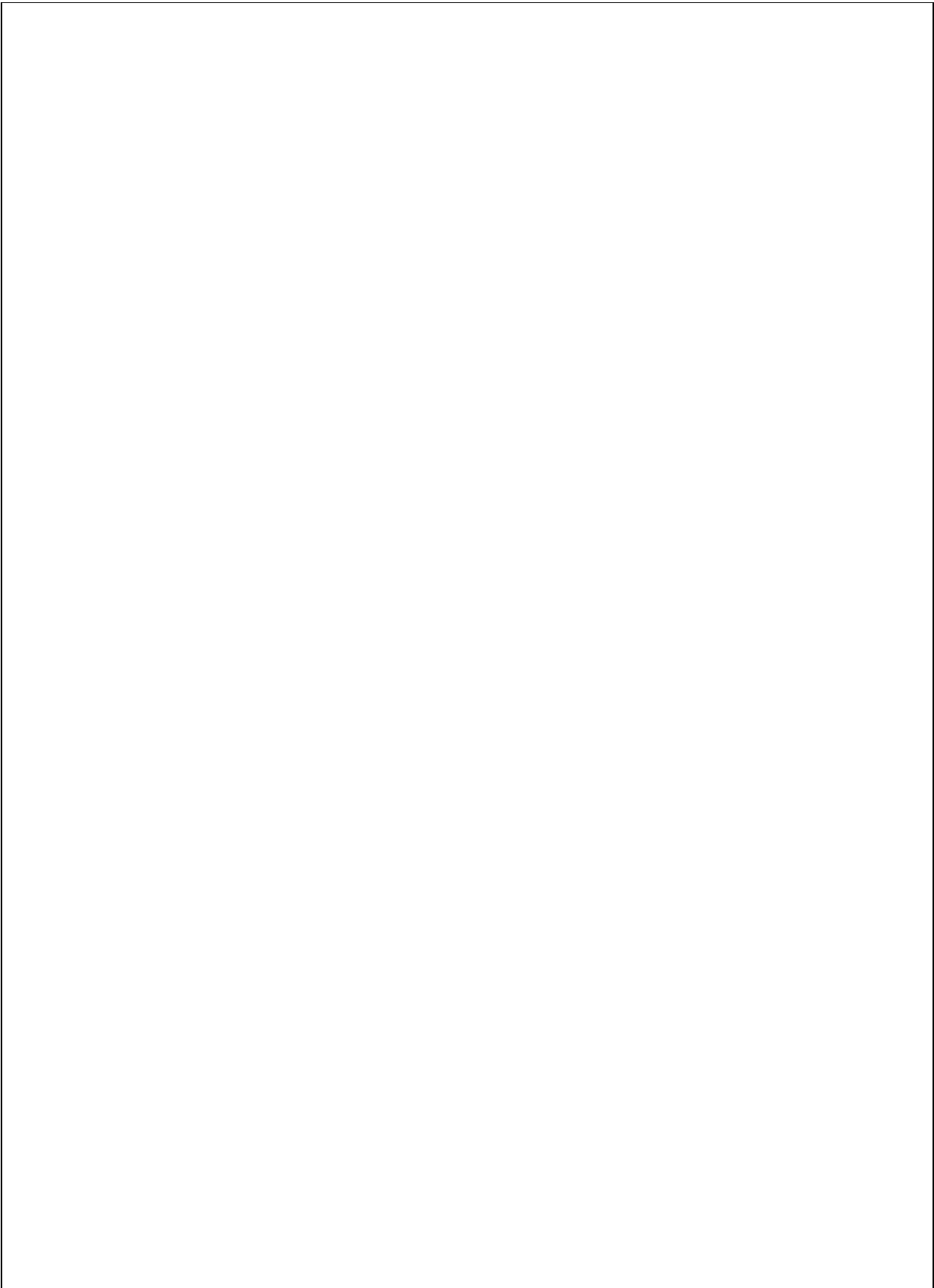
שאלה 2. (א) (15 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^7 (3^{\frac{1}{n^4+n}} - 3^{\frac{1}{n^4}})$.

(ב) (12 נק') תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-0 ומקיימת $|f(\frac{1}{4}x)| \leq \frac{1}{7}|f(x)|$ לכל x ב- I , כאשר I סביבה פתוחה של 0. הוכיחו כי $f'(0) = 0$.



שאלה 3. (א) (14 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה וגזירה פעמיים כך ש- $f''(x) \geq 0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

(ב) (13 נק') הביאו דוגמה של סדרה (a_n) מתכנסת ל-0 עם $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתבדר.



שאלה 4. (א) (14 נק') תהי פונקציה ממשית f גזירה בנקודה a ממשית, וזוג סדרות $(z_n), (x_n)$

מתכנסות ל- a כך ש- $x_n < a < z_n$ לכל n טבעי. הוכיחו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} = f'(a)$.

(ב) (13 נק') יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי (כל $a_n > 0$) מתבדר. הראו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ גם

מתבדר, כאשר $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ סכום חלקי של הטור המקורי.

