

מבחן בחדו"א 1א

מועד ב', סמסטר א' תשפ"ד, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, פרופ' ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור סעיף מסוים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 2 נקודות עבור הסעיף. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את התשובות, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר.**

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. א. (12 נק') צטטו את משפט בולצאנו-ויירשטראס.

ב. (15 נק') הוכיחו כי אם a_n סדרה שאין לה אף תת סדרה מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

א) דעם ספרו הסומי יש מה-ספנו מהכסה.

ב) הניחין, $\forall M > 0$ קלע $[-M, M]$ יש מספר סופי של איברים נוספנו (a_n) , אחיה, מספר N , ויהיה δ - (a_n) מה-ספנו מכסה עקדס סופי ונו, סתיו עם הניחין. עכן.

$$\forall M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} : |a_n| \geq M, \forall n > n_M$$

ויה קצוק ווולצנו של $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, n.e.f.

2. א. (13 נק') תהא $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך שקיים $c \in (0, 1)$ ו- $R > 0$ כך שלכל $x > R$ מתקיים $f'(x) < c$. הוכיחו כי קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $f(x) < x$.

ב. (14 נק') הוכיחו כי קיימת פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה המקיימת $f'(x) < 1$ ו- $f(x) > x$ לכל $x \in (0, \infty)$.

(א) נשוא המסמך דברתי בקטע $[R, x]$ ונקודת

$$\exists c_x \in (R, x) : f'(c_x) = \frac{f(x) - f(R)}{x - R} < c \Rightarrow$$

$$f(x) - f(R) < c(x - R) \Rightarrow f(x) < f(R) + c(x - R) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{f(R)}{x} + c(1 - \frac{R}{x}) \quad (1)$$

$$\frac{f(R)}{x} < \varepsilon = \frac{1-c}{2}, \forall x > M_1 \text{ ו- } \exists M_1 > 0 \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{x} = 0, \text{ ידוע}$$

$$c(1 - \frac{R}{x}) < c + \varepsilon = \frac{1+c}{2}, \forall x > M_2 \text{ ו- } \exists M_2 > 0 \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} c(1 - \frac{R}{x}) = c \quad -1$$

$$: \forall x > M \quad \text{דברתי (1) - N, } M = \max\{M_1, M_2\}$$

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{1-c}{2} + \frac{1+c}{2} = 1, \text{ ד.ע.נ}$$

$$x \in (0, \infty) \quad \text{דברתי } f(x) = x + \frac{1}{x} > x, \text{ ד.ע.נ (ב)}$$

$$x \in (0, \infty) \quad \text{דברתי } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1 \quad -1$$

ד.ע.נ

3. א. (13 נק') תהא סדרה המקיימת $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ לכל $n \geq 1$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.
- ב. (14 נק') תהא סדרה ונניח כי $0 < a_n < 3$ ו- $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$ לכל $n \geq 1$. הוכיחו כי יש גבול חלקי נוסף L המקיים $L \in [2022, 2023]$.

(א) נוכיח של א"ל n כי $0 < a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ו- $0 < a_1 = 1 < 3$.
 נניח $0 < a_n < 3$. אז $1 < 1 + a_n < 4$ ו- $1 < \sqrt{1+a_n} < 2$.
 מכאן $0 < a_{n+1} < 3$. כעת, נוכיח של א"ל n כי הסדרה (a_n) עולה.
 נראה, $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{2} > a_1$. נניח $a_n > a_{n-1}$. נקבע

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n$$

קיבענו (a_n) מונוטונית עולה ומסומת. נסתכל על $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
 נסמן את גבולו, $0 \leq a \leq 3$. כעת, נעביר לגבול בשני האגפים של $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.
 נקבע $a = \sqrt{1+a}$ או $a^2 - a - 1 = 0$.
 $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 ואז $0 \leq a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 3$.

(ב) בשלב זה. נניח בקטע $[2022, 2023]$ יש את סוג של איברי הסדרה.
 נסמן אינדיקס מקסימלי של איברי הסדרה בקטע $[2022, 2023]$ ב- $n_{\max}$.
 אז, $a_{n_{\max}+1} < 2022$, כל של ונניח $n > n_{\max}$, $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$.
 כי $a_n < 2022$, $\forall n \geq n_{\max}+1$ ונסיימו של - 2024 גבול חלקי.
 אם $a_{n_{\max}+1} > 2023$, אז של או ונניח, נקבע $n > n_{\max}$,
 $a_n > 2023$, $\forall n \geq n_{\max}+1$ ונסיימו של - 0 גבול חלקי.
 ד.ע.נ

4. א. (13 נק') יהא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ מתכנס.

ב. (14 נק') נתון כי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה. הוכיחו כי קיים מספר $C > 0$ כך ש- $|f(x)| \leq Cx$ לכל $x \in [1, \infty)$.

$$e^x = 1 + x + o(x), x \rightarrow 0, \text{ jika } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ jika } |x| < \delta, \text{ maka } |e^x - 1 - x| < \epsilon$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \Leftrightarrow b_n = o(a_n) \text{ (no)}. e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n), n \rightarrow \infty \text{ S1d}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{a_n} = 0$, כל סדרה מתכנסת ל-0

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ ואל $e^{a_n} - 1 = a_n + b_n$

$$\Rightarrow \forall x, y \geq 1, |x-y| \leq \delta_0 \Rightarrow \exists \delta_0 > 0 \forall \epsilon, \epsilon = 1, \dots (2)$$
$$N-\delta(x>1 \text{ ו } |x|) \quad [1,x] \text{ נקודה כללית } . |f(x)-f(y)| \leq 1$$
$$N = \left\lceil \frac{x-1}{\delta} \right\rceil + 1$$
$$: 1 < x - \delta_1 \text{ and } N > 128 \text{ and } p_{AN} \cdot (N \leq \frac{x-1}{\delta_0} + 1 \text{ s.k.})$$
$$|f(x) - f(1)| \leq |f(x) - f(x - \delta_0)| + |f(x - \delta_0) - f(x - 2\delta_0)| + \dots$$
$$+ |f(x - (N-2)\delta_0) - f(x - (N-1)\delta_0)| + |f(x - (N-1)\delta_0) - f(1)| \leq$$
$$\leq N \cdot 1 \leq \frac{x-1}{d_2} + 1$$
$$\text{Sk} \quad |f(x)| - |f(1)| \leq \frac{x}{\sqrt{x_0}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x_0}}, \quad \forall x \geq 1, \quad |10N$$
$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq \frac{\delta}{\delta_0} + M, \quad \forall x \geq 1$$
$$|f(x)| \leq x \left(\frac{1}{\delta_0} + \frac{M}{x} \right) \leq x \left(\frac{1}{\delta_0} + M \right), \forall x \geq 1, \quad |K_N$$
$$\cdot d.e.N. C = \frac{1}{f_0} + M \quad \text{and}$$