

מבחן בחדו"א 1א

מועד א', סמסטר א' תשפ"ה, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, פרופ' ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור סעיף מסוים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 2 נקודות עבור הסעיף. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את התשובות, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר.**

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. א. (12 נק') נתונה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. הגדירו באמצעות ϵ ו- δ את הפסוק " f רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ ".

ב. (15 נק') הוכיחו כי אם $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הן שתי פונקציות רציפות במ"ש ב- $\mathbb{R}$, אז גם $f \circ g$ רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$.

2. א. (13 נק') מצאו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ב. (14 נק') שימו לב כי עבור המספרים $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ מתקיים $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. הוכיחו כי קיימים אינסוף זוגות של מספרים חיוביים $\alpha, \beta > 0$ כך ש- $\alpha \neq \beta$ אבל $\alpha^\alpha = \beta^\beta$.

3. א. (13 נק') תהא סדרה המקיימת שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. הוכיחו כי סדרה מתכנסת.

ב. (14 נק') תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה גזירה פעמיים ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי $f''(0) \geq 0$.

4. א. (13 נק') תהא a_n סדרה חיובית ונסמן ב- $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ את סדרת הסכומים החלקיים. הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} S_n$ מתכנס בתנאי.

ב. (14 נק') מצאו סדרה a_n המקיימת שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} S_n$ אינו מתכנס.

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):