אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר קיץ תשע״ג, מועד א׳
תאריך: 01.09.2013

<u>מבחן סוף סמסטר ב״חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א״</u>

המרצה: פרופ׳ יעקב יעקובוב

<u>הנחיות</u>

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

<u>מבנה הבחינה</u>

- יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות: <u>שאלה אחת מחלק א׳ ושלוש שאלות מחלק ב׳</u>.
- סך הנקודות במבחן הינו 110 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

חלק א' – הוכיחו את אחת משתי הטענות הבאות. לא תיבדק יותר מהוכחה אחת (במידה ולא תרשמו במה בחרתם – תיבדק הראשונה שמופיעה במחברת).

שאלה 1. (25 נק') תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי הסדרה מתכנסת ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$.

שאלה 2. (25 נק') תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי f חסומה מלרע ומלעיל וקיימים $x_m, x_M \in[a,b]$ כך שלכל x בקטע מתקיים $f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)$.

הערה: מספיק להוכיח באופן מלא כי f חסומה מלעיל וקיים x_M .

חלק ב' – ענו על כל השאלות הבאות.

שאלה 3. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) (5 נק') לכל סדרת מספרים $\{a_n\}$ אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ אז קיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ב) (5 נק') תהיינה שתי פונקציות $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in(a,b)$. אם f גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז המכפלה $f(x)g(x)$ אינה גזירה ב- x_0 .

(ג) (10 נק') תהיינה שתי פונקציות $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש- $f''(x)>0$ ו- $g'(x)>f'(x)$ לכל $x>0$. אז לכל $x>0$ מתקיים $f(2x)-f(x)<g(3x)-g(2x)$.

(ד) (10 נק') תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים. אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,\frac{1}{n^2}\}$ מתכנס.

שאלה 4. (א) (10 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בסביבת הנקודה 0 כך ש- $f(0)=f'(0)=0$. הוכיחו שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתכנס בהחלט.

(ב) (20 נק') תהיינה $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ סדרות חסומות של מספרים חיוביים כך ש- $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n>0$. הוכיחו כי

$$\frac{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}{\limsup\limits_{n\to\infty} b_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\le\frac{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}{\liminf\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

שאלה 5. (א) (9 נק') נתונה פונקציה f חסומה בסביבת הנקודה 0. מהו הגבול $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\tan x)$? הוכיחו לפי הגדרת קושי ($\varepsilon-\delta$).

(ב) (9 נק') יהיו $a_1,a_2,\dots,a_k$ מספרים ממשיים כך שלכל $j=1,\dots,k$ מתקיים $a_j>1$. נסמן $b_n=\frac{1}{\sqrt[n]{a_1^{n^2}+a_2^{n^2}+\cdots+a_k^{n^2}}}$. הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

(ג) (7 נק') חישבו ללא שימוש בכלל לופיטל את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+e^n)}{\ln(1+e^{2n})}$.