אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר קיץ תשע״ג, מועד ב׳
תאריך: 10.10.2013

<u>מבחן סוף סמסטר ב״חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א״</u>

המרצה: פרופ׳ יעקב יעקובוב

<u>הנחיות</u>

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ואין דף נוסחאות.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

<u>מבנה הבחינה</u>

- יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות: <u>שאלה אחת מחלק א׳ ושלוש שאלות מחלק ב׳</u>.
- סך הנקודות במבחן הינו 110 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

<u>חלק א'</u> – הוכיחו את אחת משתי הטענות הבאות. לא תיבדק יותר מהוכחה אחת (במידה ולא תרשמו במה בחרתם – תיבדק הראשונה שמופיעה במחברת).

<u>שאלה 1</u>. (25 נק') תהי $\{a_n\}$ סדרה אי-שלילית, מונוטונית יורדת ל- 0. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

<u>שאלה 2</u>. (25 נק') תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה (הקטע סופי וסגור). אזי f רציפה במידה שווה ב- $[a,b]$.

<u>חלק ב'</u> – ענו על כל השאלות הבאות.

<u>שאלה 3</u>. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) (5 נק') לכל סדרת מספרים חיוביים $\{a_n\}$ השואפת ל- 0, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

(ב) (5 נק') תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ונגדיר את הפונקציה $g(x)=\max_{t\in(a,x)} f(t)$. אם g רציפה ב- (a,b) אז גם f רציפה ב- (a,b).

(ג) (10 נק') תהיינה שתי פונקציות $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ו- $x_0\in(a,b)$. אם g רציפה ב- x_0 וגם וקיים הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^2}$ אז $f(x)g(x)$ גזירה ב- x_0.

(ד) (10 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה ותהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה חסומה. נסמן $f(A)=\{f(a):a\in A\}$. אז $\inf f(A)=f(\inf A)$.

<u>שאלה 4</u>. (א) (10 נק') תהי $f(x)=x\ln x+\frac{1}{x}\sin(x^3)$. בדקו האם הפונקציה רציפה במידה שווה בתחומים: (i) $(0,20)$; (ii) $(0,\infty)$.

(ב) (20 נק') תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל n קיים $k>n$ כך ש- $f(a_n)<a_k$. הוכיחו ש- $\limsup_{n\to\infty} f(a_n)\le\limsup_{n\to\infty} a_n$.

<u>שאלה 5</u>. (א) (10 נק') תהי $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. רשמו את פיתוח טיילור של f מסדר 2 סביב הנקודה $x_0=0$, ואת שארית לגרנז'. בעזרת הנוסחה מצאו קירוב ל- $\sqrt{10}$. תנו הערכה טובה ככל שניתן לשגיאה של הקירוב.

(ב) (15 נק') תהי סדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י $a_1=\frac{1}{e}$ ולכל n טבעי $a_{n+1}=a_n^2-\frac{1}{4}a_n^4$. הראו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.