

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ח, מועד א'
תאריך: 01.02.2018

מבחן סוף סמסטר ב"חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון, מותר דף נוסחאות 1, חד-צדדי, A4.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות עם פתרון מלא שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על כל 4 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (25 נק') הוכיחו משפט על החלפת גבול ואינטגרל: נניח $f_n \in R([a, b])$ ותהי

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח שמתקיים $f_n \rightarrow f$ במ"ש ב- $[a, b]$. אזי $f \in R([a, b])$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{ומתקיים}$$

שאלה 2. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, מחזורית ב- 2π , גזירה ברציפות. נתון ש- $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt < 2\pi$.

הוכיחו כי:

(א) (11 נק') $\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 < 1$, כאשר $\hat{f}(n)$ מסמן מקדם פורייה בטור פורייה של f .

(ב) (14 נק') $\exists c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\int_0^{2\pi} |f(t) - c|^2 dt < 2\pi$.

שאלה 3. (א) (15 נק') תהי $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה רציפה ומונוטונית יורדת. נגדיר סדרה

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^{n+1} f(t) dt \quad (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ע"י}$$

ושמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [0, f(1)]$.

(ב) (13 נק') תהי $f \in C[0, 1]$ פונקציה המקיימת $f(0) = 1, f(1) = 3$. בונים סדרת

הפונקציות $g_n(x) = f(x^n), n \in \mathbb{N}$. האם הסדרה מתכנסת במ"ש ב- $[0, 1]$? האם הסדרה מתכנסת במ"ש ב- $[0, \frac{1}{2}]$?

שאלה 4. נתונה פונקציה $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|}{x^2 |y| + (x-y)^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

(א) (10 נק') למצוא כל הכיוונים $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ עבורם קיימת נגזרת כיוונית

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0)$$

(ב) (5 נק') האם f דיפרנציאבילית ב- $(0, 0, 0)$?

(ג) (6 נק') האם f רציפה ב- $(0, 0, 0)$?

(ד) (6 נק') האם ל- f יש מינימום/מקסימום מוחלטים ב- \mathbb{R}^3 ? אם כן, חישבו אותם.