

# אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ח, מועד ב'  
תאריך: 09.03.2018

## מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון, מותר דף נוסחאות 1, חד-צדדי, A4.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות עם פתרון מלא שיכתבו על מחברת המבחן בלבד.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

### מבנה הבחינה

- יש לענות על כל 4 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הינו 105 אך ציונו של תלמיד לא יעלה על 100.

**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך  
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

**שאלה 1.** (25 נק') הוכיחו משפט קושי-הדמר: נתון טור חזקות  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . אז רדיוס התכנסות

$$\text{שלו } R \text{ נתון ע"י הנוסחה הבאה } \frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}, \text{ כאשר } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ ו- } \frac{1}{0} = \infty.$$

**שאלה 2.** (25 נק') הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx^2)}{1+n^4}$  גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}$ .

**שאלה 3.** (א) (15 נק') נגדיר את הפונקציות  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2 + \frac{1}{n}e^x}$ . הוכיחו כי קיים גבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \text{ וחשבו אותו.}$$

(ב) (7 נק') האם האינטגרל  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x \cdot \cos x}{1+x^2} dx$  מתכנס?

(ג) (6 נק') חישבו את האינטגרל  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\arcsin(\ln x)}{x} dx$ .

**שאלה 4.** נתונה פונקציה  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

(א) (7 נק') הוכיחו לפי הגדרת קושי ( $\varepsilon - \delta$ ) שהפונקציה רציפה ב- $(0, 0, 0)$ .

(ב) (10 נק') חישבו  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$  לכל  $(x, y, z)$  ב- $\mathbb{R}^3$  ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0)$ .

(ג) (10 נק') האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0, 0)$ ?