

בחינה בחדו"א 2, מועד א

סמסטר ב' תשפ"ב, אוניברסיטת תל-אביב, 26 יוני 2022

מרצים: פרופ' שירי ארטשטיין, פרופ' יעקוב יעקובוב

משך הבחינה הנו שלוש שעות.
השימוש במחשבון ובכל חומר עזר אסור פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את הסעיף, לכתוב "אינני יודע/ת" (לא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% מערך הסעיף או השאלה. סה"כ נקודות בבחינה 108, הציון הסופי לא יעלה על 100.
אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים הנוספים בסוף השאלון. תיבדקנה תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.
עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.

כתבו כמה נקודות בונים קיבלתם ב"חדו"א קווסט" (במידה והשתתפתם): _____

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. הוכיחו או הפריכו

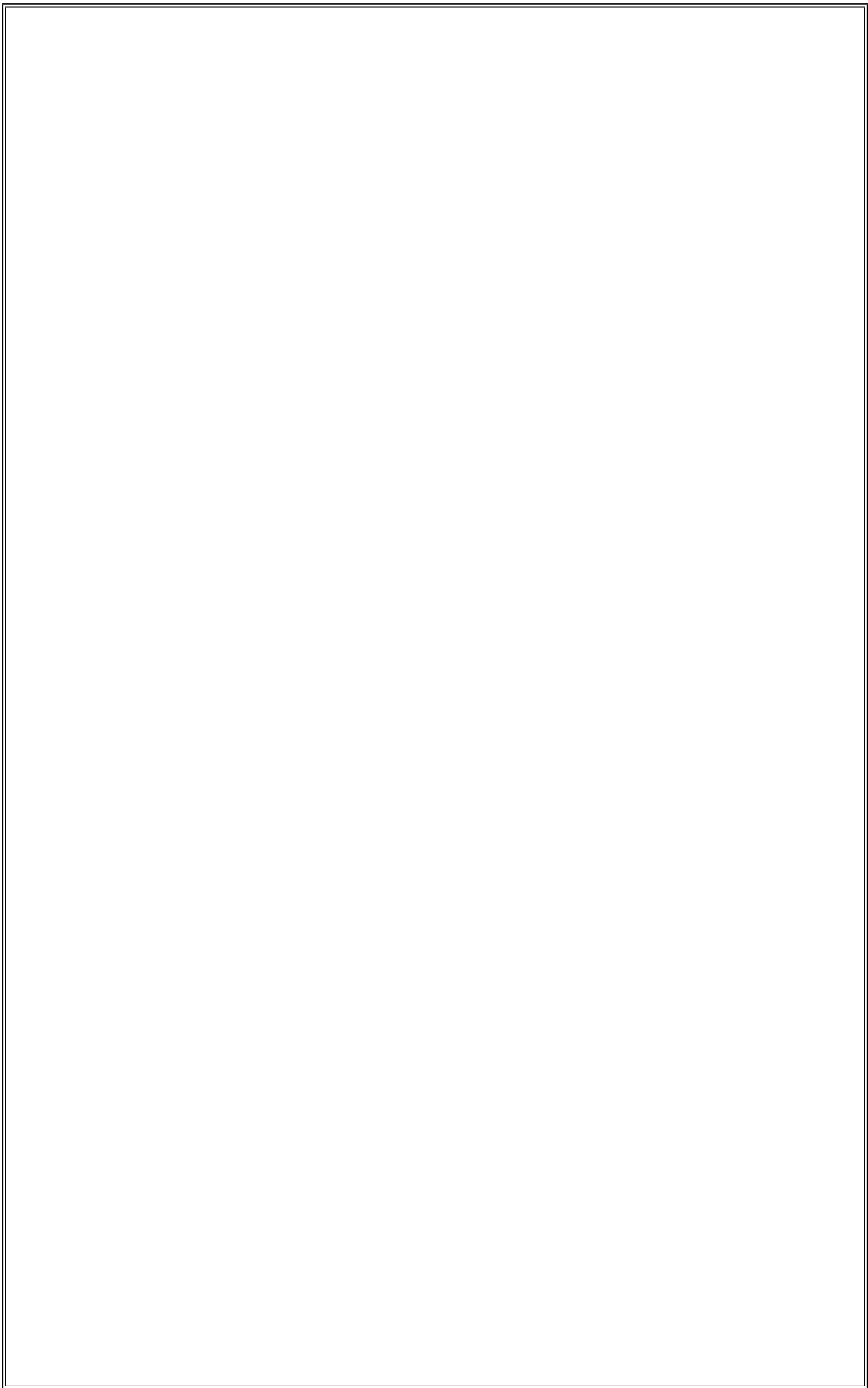
את הטענות הבאות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = 1 \quad (\text{א})$$

(15 נקודות)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad (\text{ב})$$

(12 נקודות)



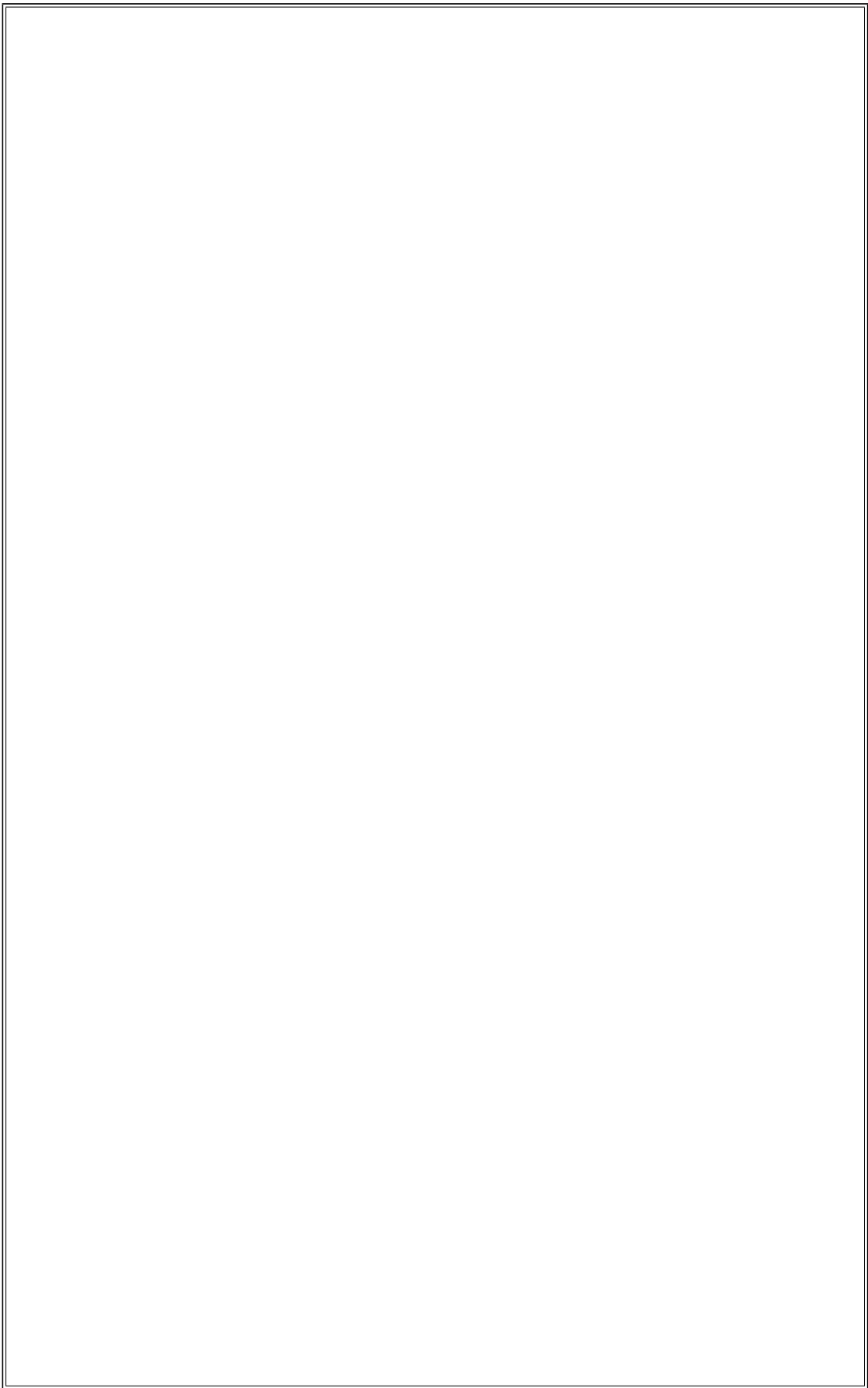
2. תהי פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ונסמן עבור $n \in \mathbb{N}$ את

$$f_n(x) = \sup \left\{ f(y) : y \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \right\}$$

- (א) הראו כי אם f רציפה, מתקיים $f_n \rightarrow f$ במידה שווה על כל קטע קומפקטי.
(ב) הוכיחו כי אם $f_n \rightarrow f$ במ"ש על קטע פתוח המכיל את x_0 אז f רציפה ב x_0 .

(15 נקודות)

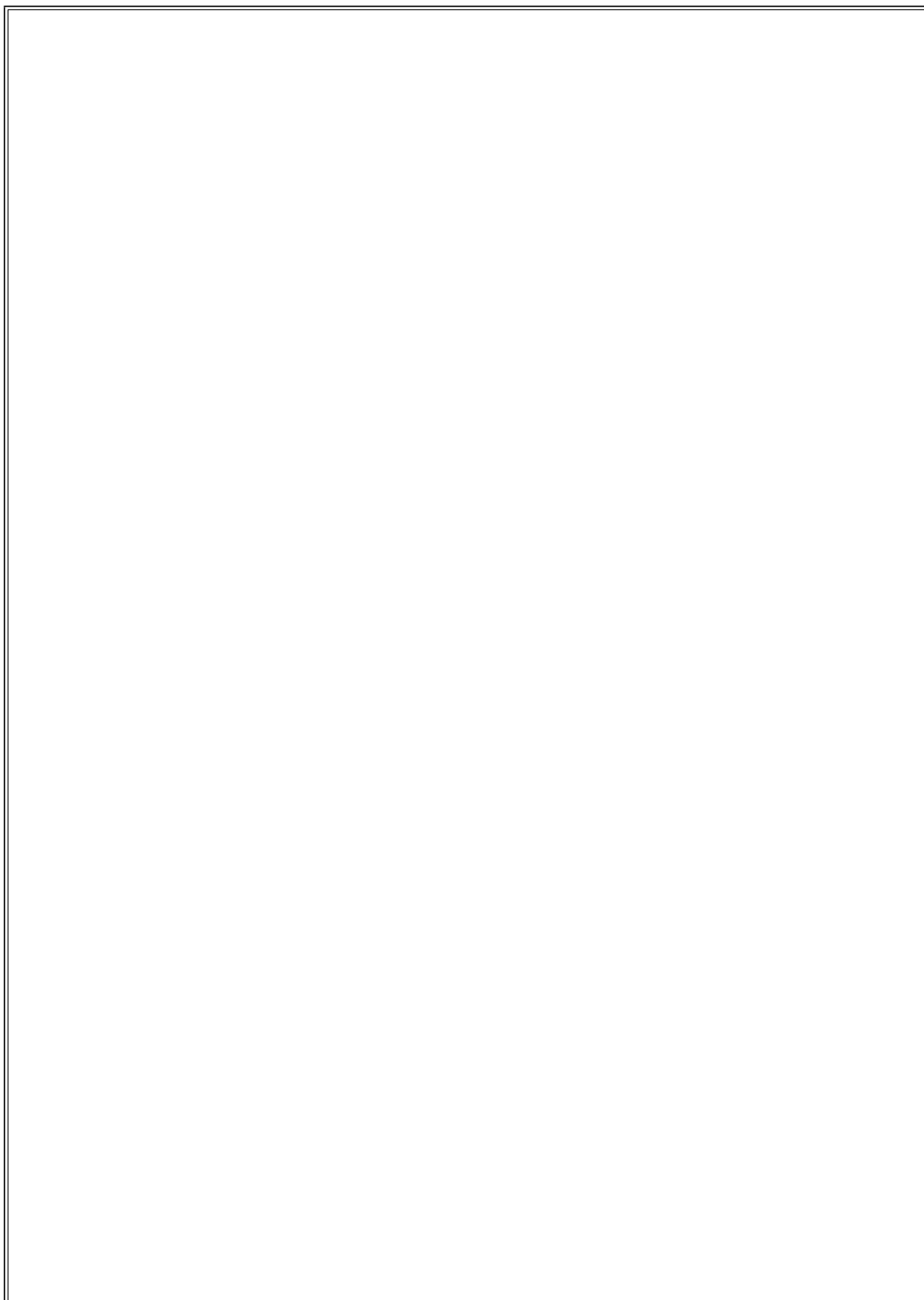
(12 נקודות)

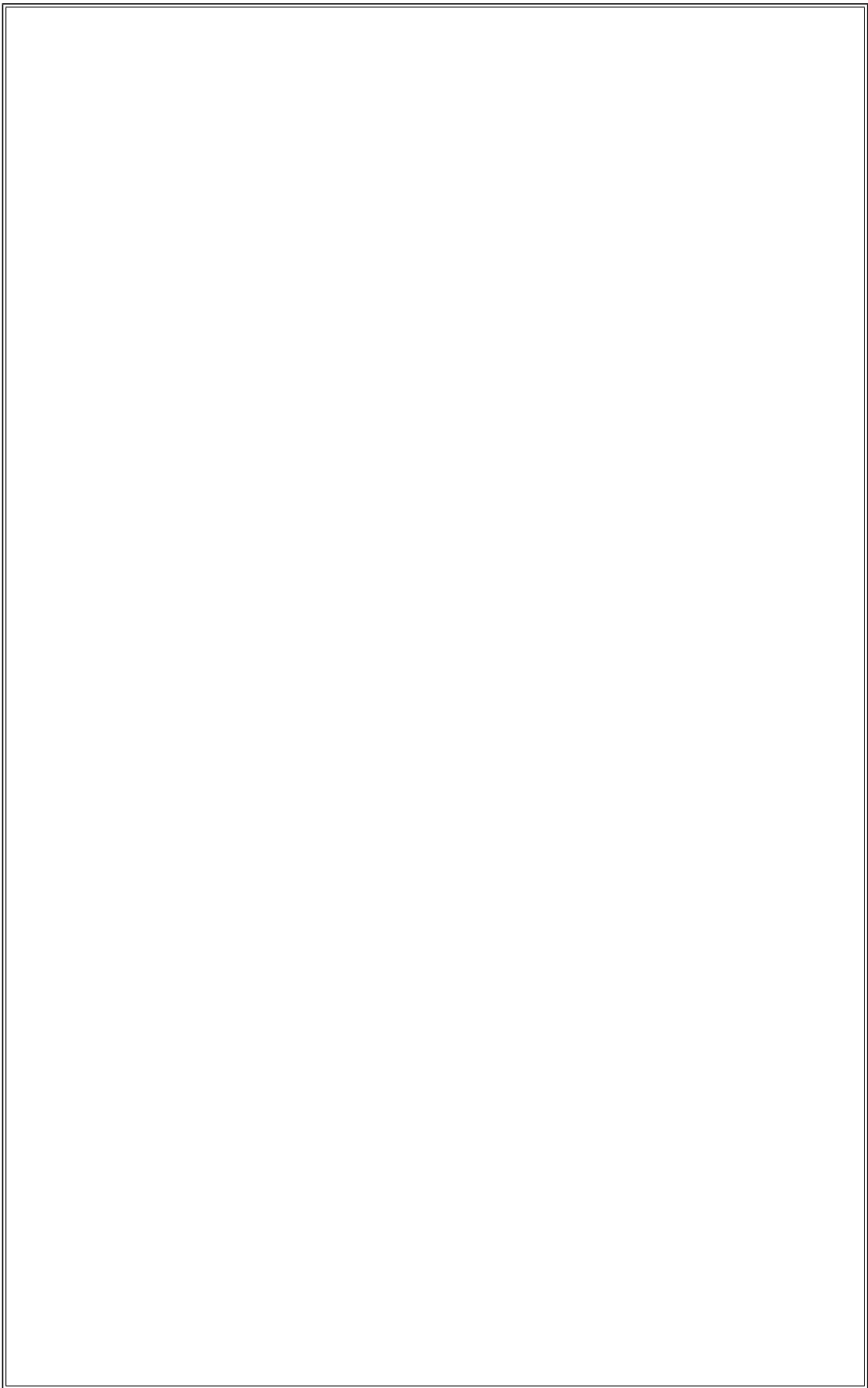


3.

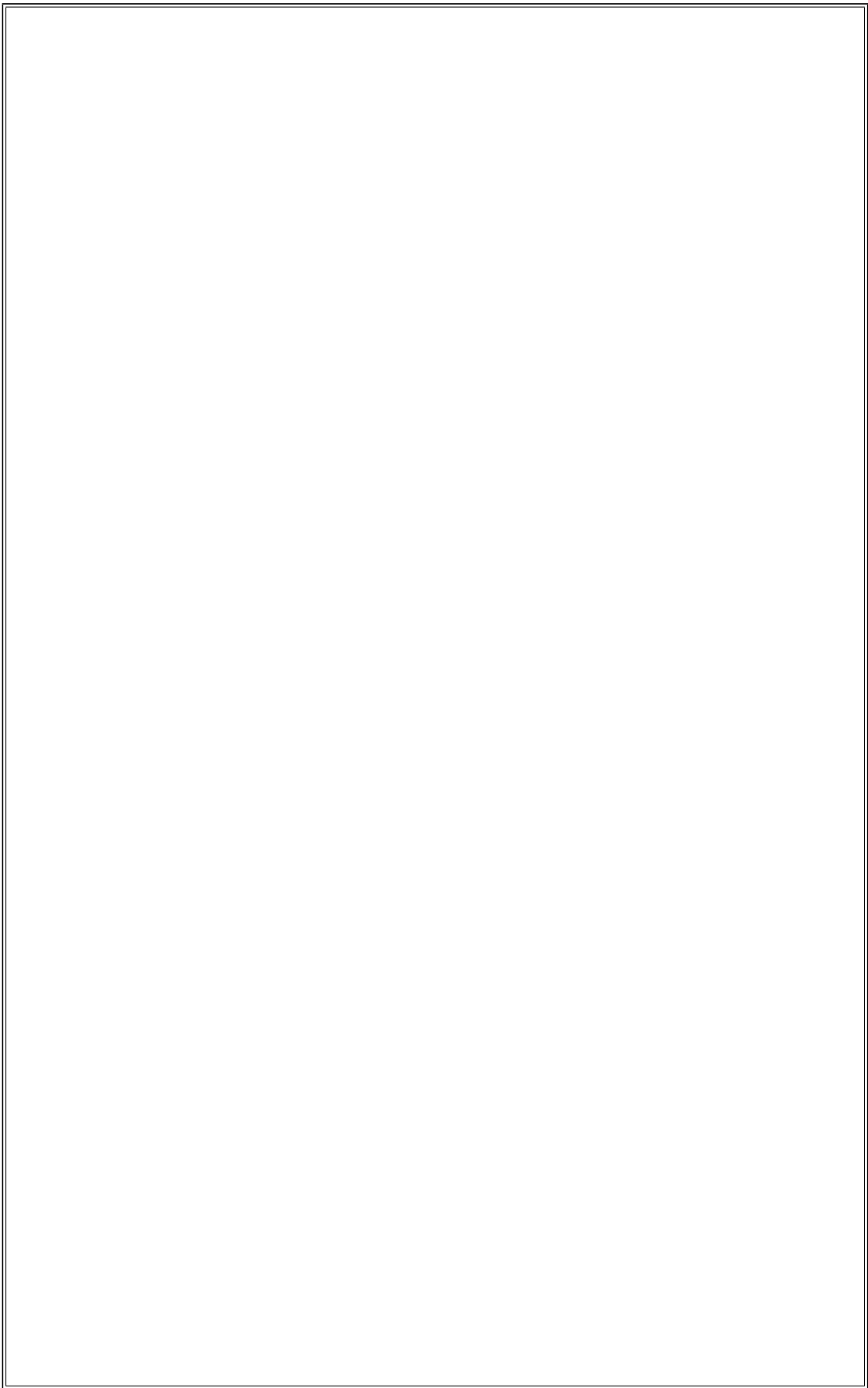
- (15 נקודות) (א) תהי $f \in R(\mathbb{T})$ ונניח כי $S_{N^2}f \xrightarrow{u} f$. נניח כי $S_N f(x_0) \rightarrow c$, הראו כי $c = f(x_0)$.
 (12 נקודות) (ב) תהי $f \in R(\mathbb{T})$ ההמשכה המחזורית של $g : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ הנתונה על ידי $g(t) = t$. מצאו את

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \|f - (a + be^{it} + ce^{-it})\|_2$$





- (12 נקודות) (א) תהי X קבוצה ו- d_1, d_2 מטריקות על X כך ש (X, d_1) קומפקטי ו (X, d_2) אינו קומפקטי. הוכיחו כי $(X, d_1 + d_2)$ מרחב מטרי וקבעו האם ייתכן שהוא קומפקטי.
- (15 נקודות) (ב) תהי $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ סדרה במרחב l_2 ויהי $x \in l_2$, הוכיחו כי $x^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ אם ורק אם $\|x^{(n)}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|_2$ וגם $x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j$ לכל $j \in \mathbb{N}$.



במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):