

בחינה בחדו"א 2, מועד ב

סמסטר ב' תשפ"ב, אוניברסיטת תל-אביב, 2 אוגוסט 2022

מרצים: פרופ' שירי ארטשטיין, פרופ' יעקוב יעקובוב

משך הבחינה הנו שלוש שעות.
 השימוש במחשבון ובכל חומר עזר אסור פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
 אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את הסעיף, לכתוב "אינני יודע/ת" (לא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% מערך הסעיף או השאלה. סה"כ נקודות בבחינה 108, הציון הסופי לא יעלה על 100.
 אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים הנוספים בסוף השאלון. תיבדקנה תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.
 עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.

כתבו כמה נקודות בונים קיבלתם ב"חדו"א קווסט" (במידה והשתתפתם): _____

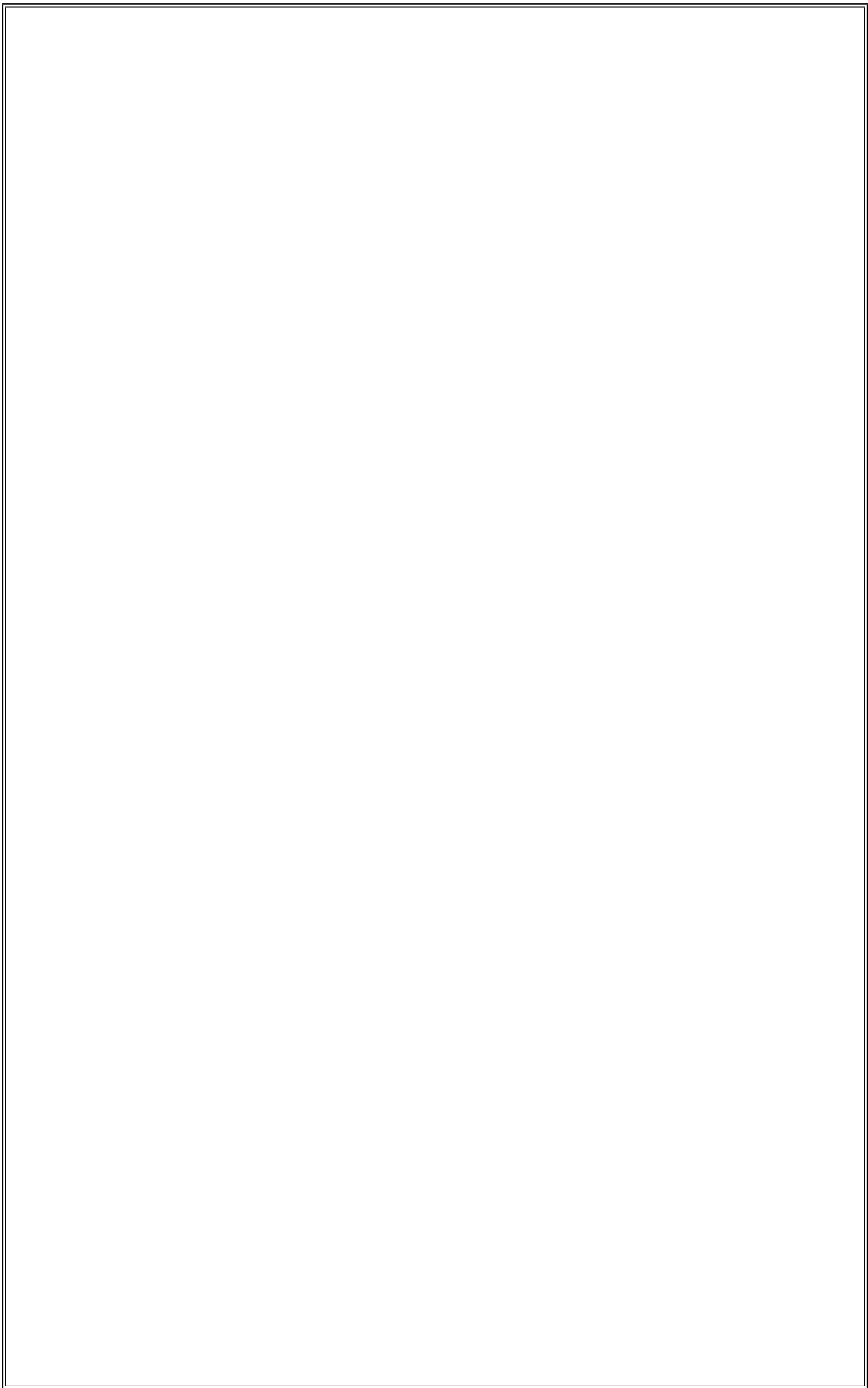
מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. תהי פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית על כל קטע סופי ונסמן עבור $n \in \mathbb{N}$ את

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]} f(y) dy$$

- (א) הראו כי אם f רציפה, מתקיים $f_n \rightarrow f$ במידה שווה על כל קטע קומפקטי. (15 נקודות)
- (ב) הניחו כי ל f יש אי רציפות בנקודה כלשהי x_0 . האם ייתכן ש $f_n \rightarrow f$ נקודתית לכל $x \in \mathbb{R}$? (12 נקודות)



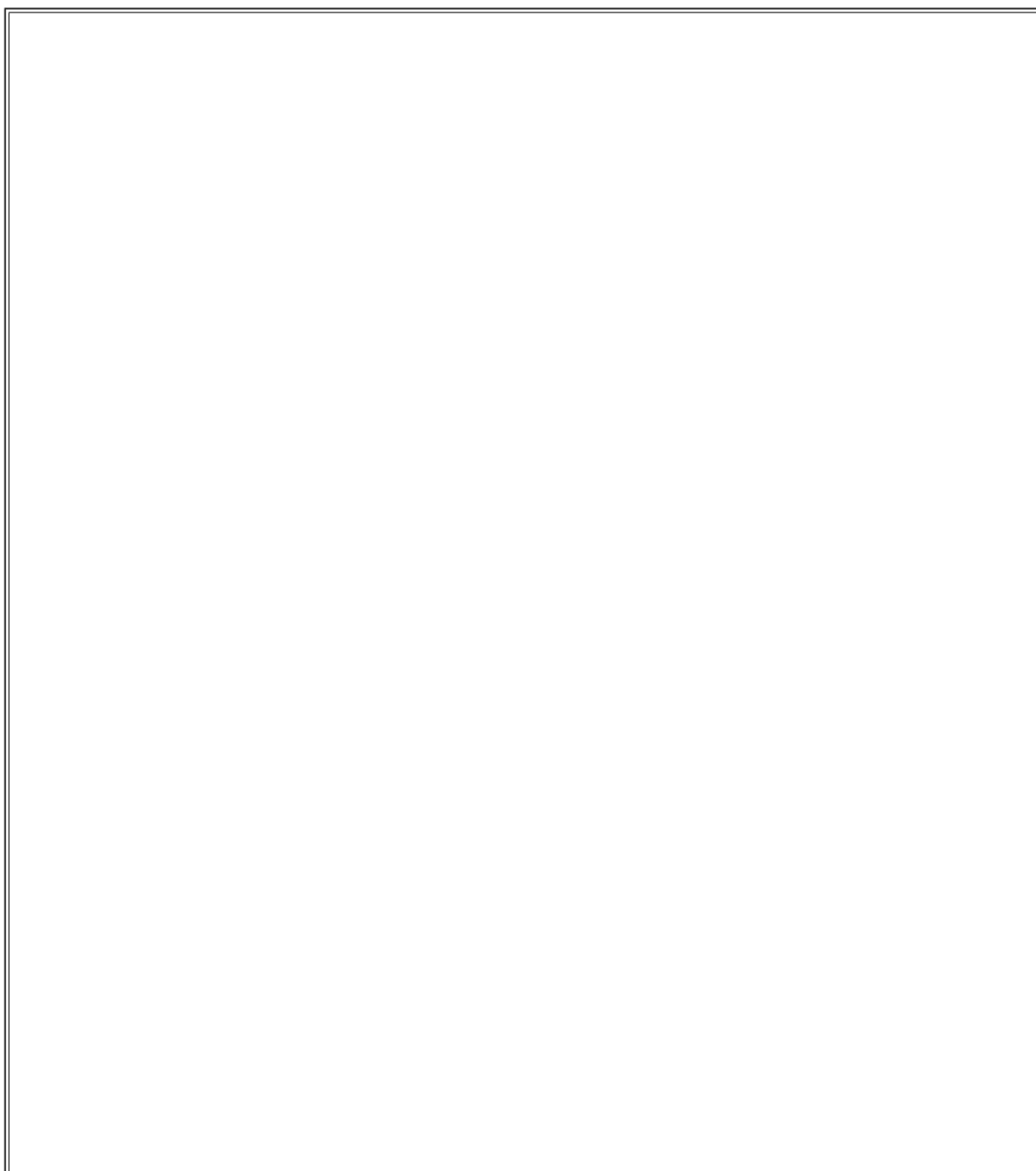
2.

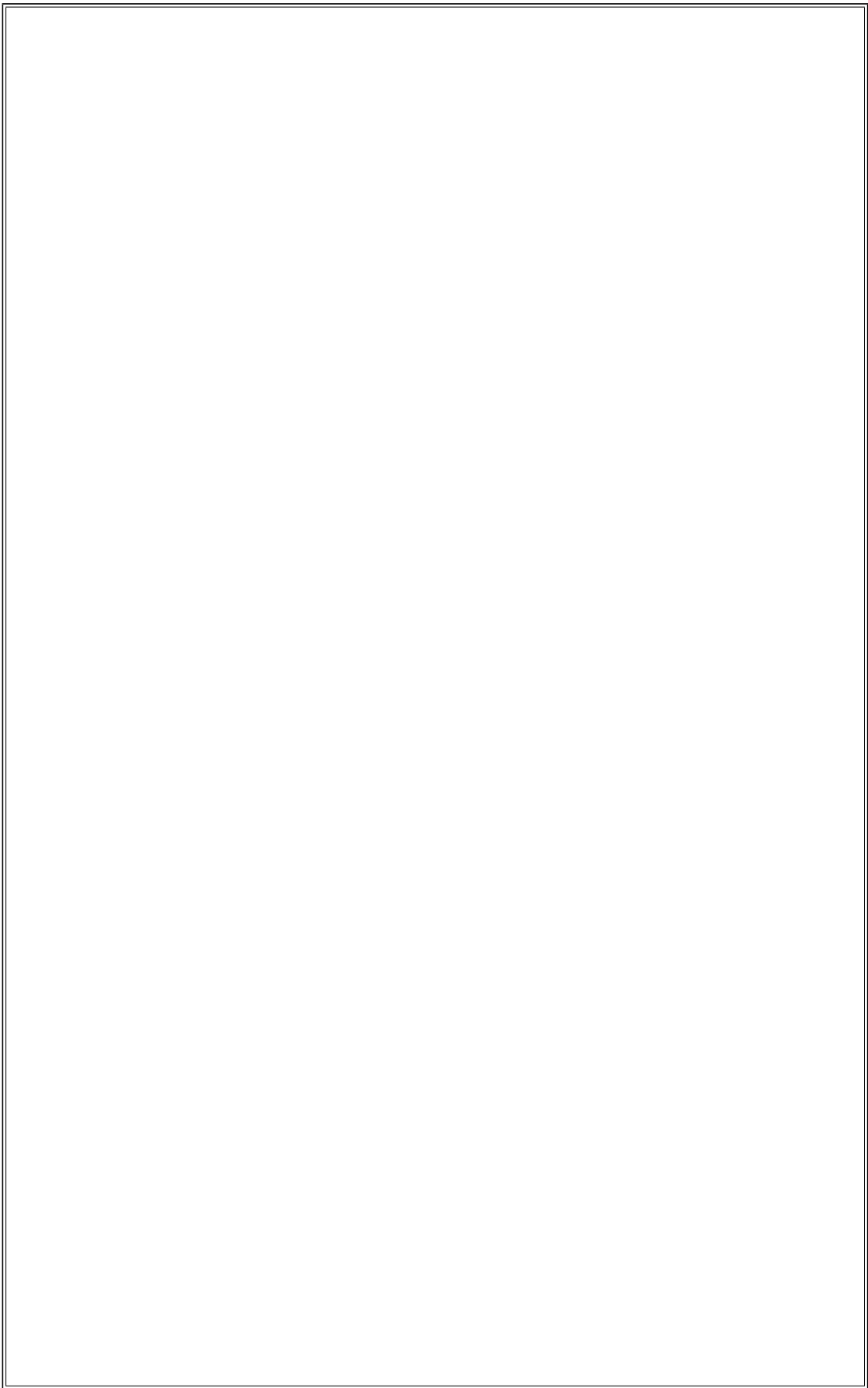
- (12 נקודות) (א) תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה אי שלילית כך שסכום אבל שלה מתכנס, האם בהכרח הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ?
- (15 נקודות) (ב) תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים, ונניח כי

$$(A) \sum_{n \geq 0} a_n = S$$

(כלומר, הסדרה סכימה לפי אבל ומתכנסת לגבול סופי S). הוכיחו כי לכל פולינום P כך ש- $P(0) = 0$ מתקיים

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n \geq 0} a_n P(x^n) = S \cdot P(1)$$



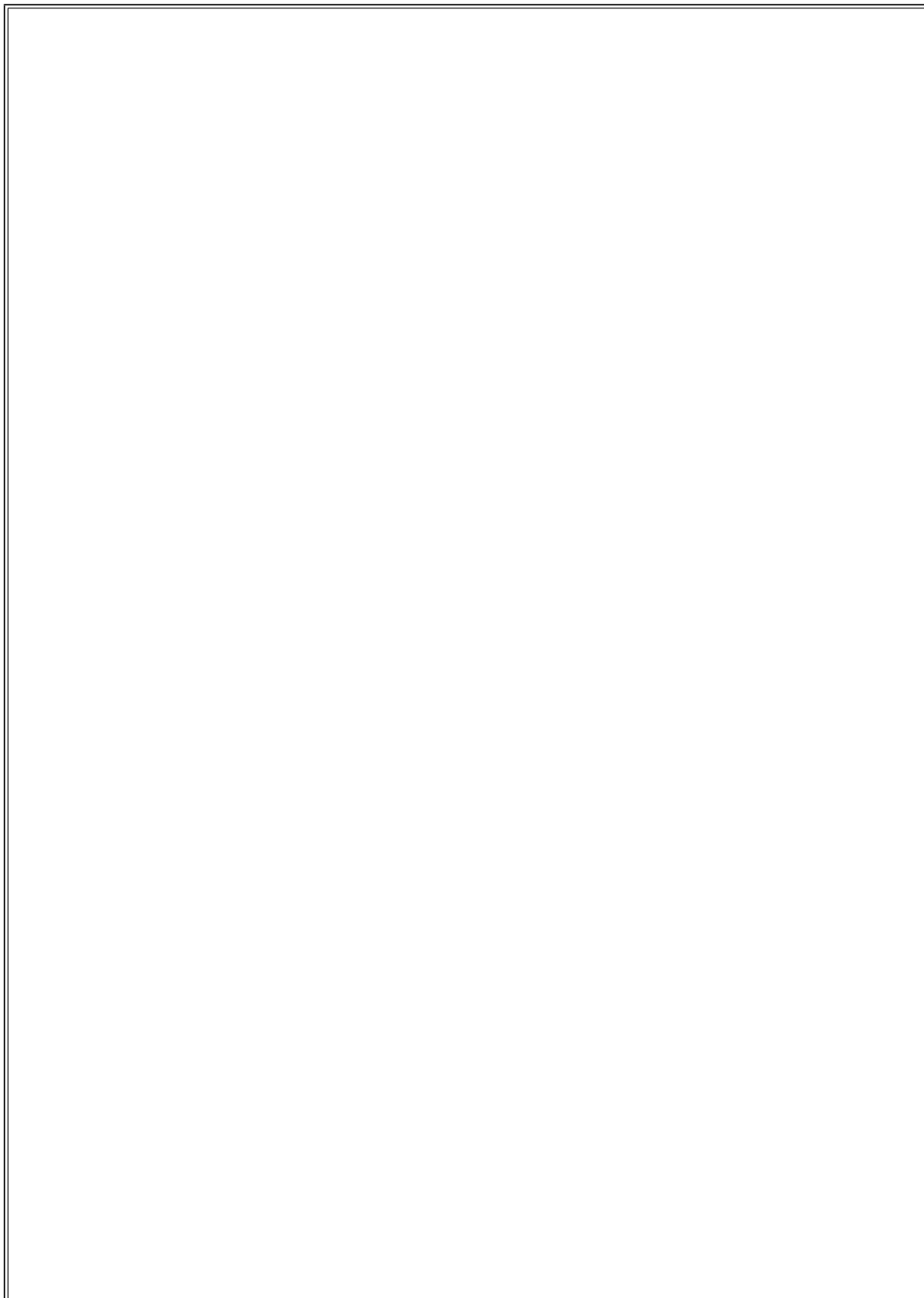


(27 נקודות)

3. נסמן $C_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx$ כאשר D_N גרעין דיריכלה, ונסמן $G_N(x) = \frac{1}{C_N} |D_N(x)|$. הראו שלכל פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא 2π מחזורית ורציפה מתקיים

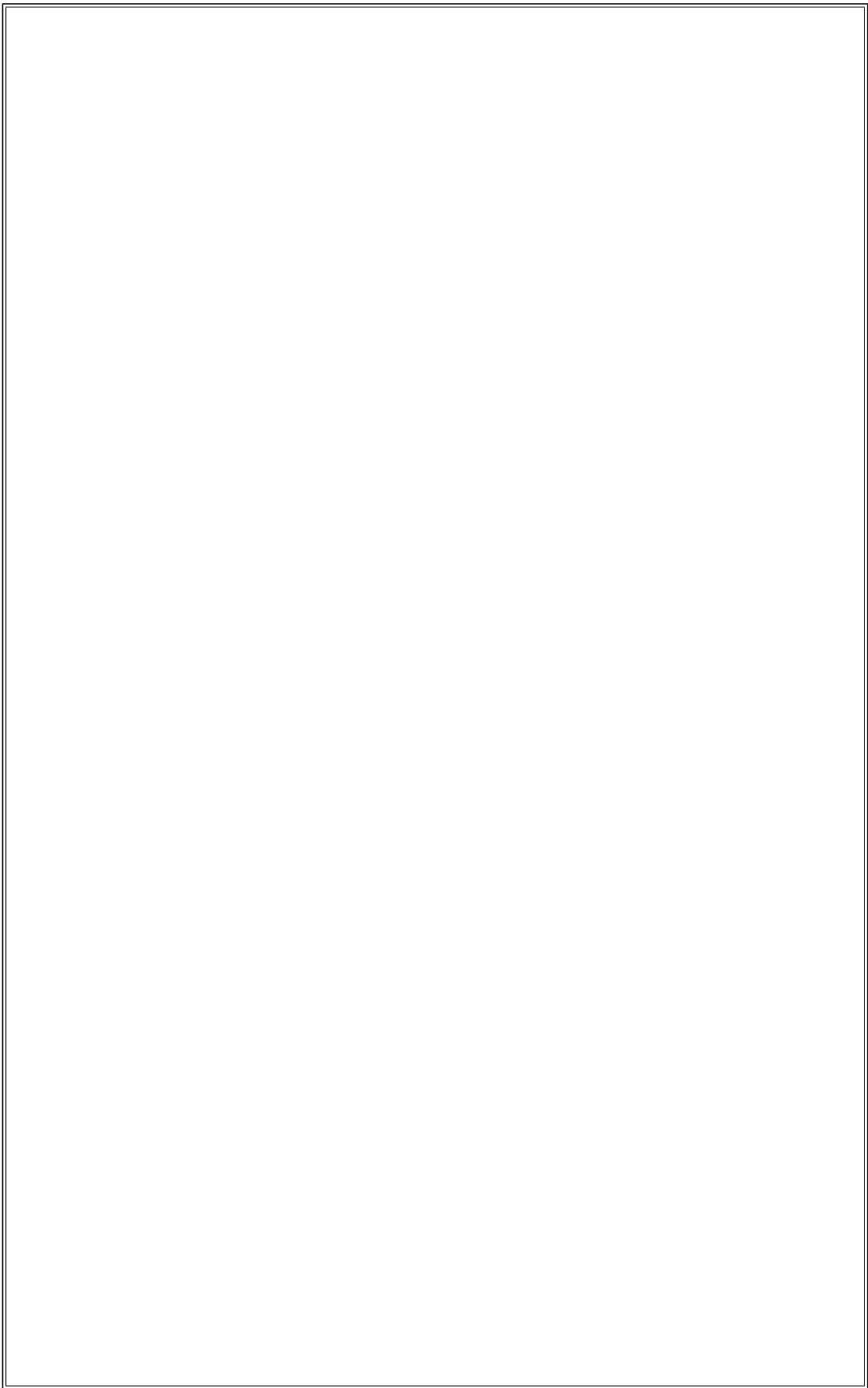
$$G_N * f \xrightarrow{u} f$$

ניתן במידת הצורך להשתמש בכך ש- $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx = \infty$ ללא הוכחה. שימו לב: משפט כללי על "גרעין טוב" לא מופיע ברשימת המשפטים שהוכחו בכתה.



(12 נקודות) (א) יהי (X, d) מרחב מטרי ונניח כי $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ סדרות קושי. הראו כי קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$.

(15 נקודות) (ב) יהי (X, d) מרחב מטרי לא קומפקטי, הוכיחו כי קיימת תת קבוצה אינסופית $Y \subset X$ כך שבמרחב (Y, d) כל תת קבוצה היא פתוחה.



במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):