

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ד, מועד א'  
תאריך: 02.09.2024

### מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א'

המרצים: דמיטרי פייפמן ויעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

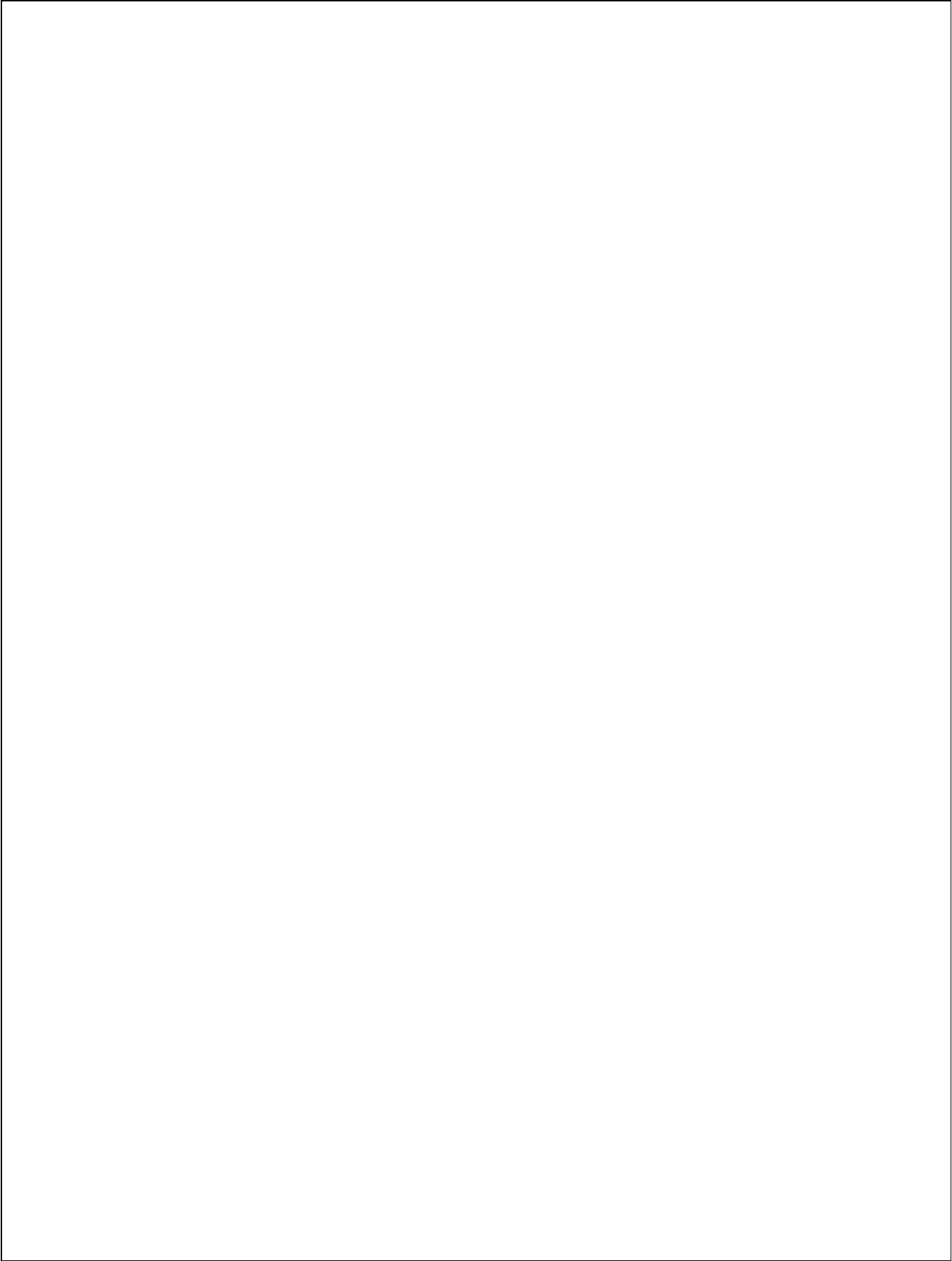
**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

**שאלה 1.** (א) (12 נק') הוכיחו כי קיים אינטגרל רימן  $\int_0^n \{x^2\} dx$  (כאשר  $0 \leq \{a\} = a - [a] < 1$  חלק השברי של  $a$ ) וש-  $\int_0^n \{x^2\} dx \leq n$  לכל  $n$  טבעי.  
(ב) (15 נק') הוכיחו שקיים  $c > 0$  כך שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $\int_0^n \{x^2\} dx \geq cn$ .

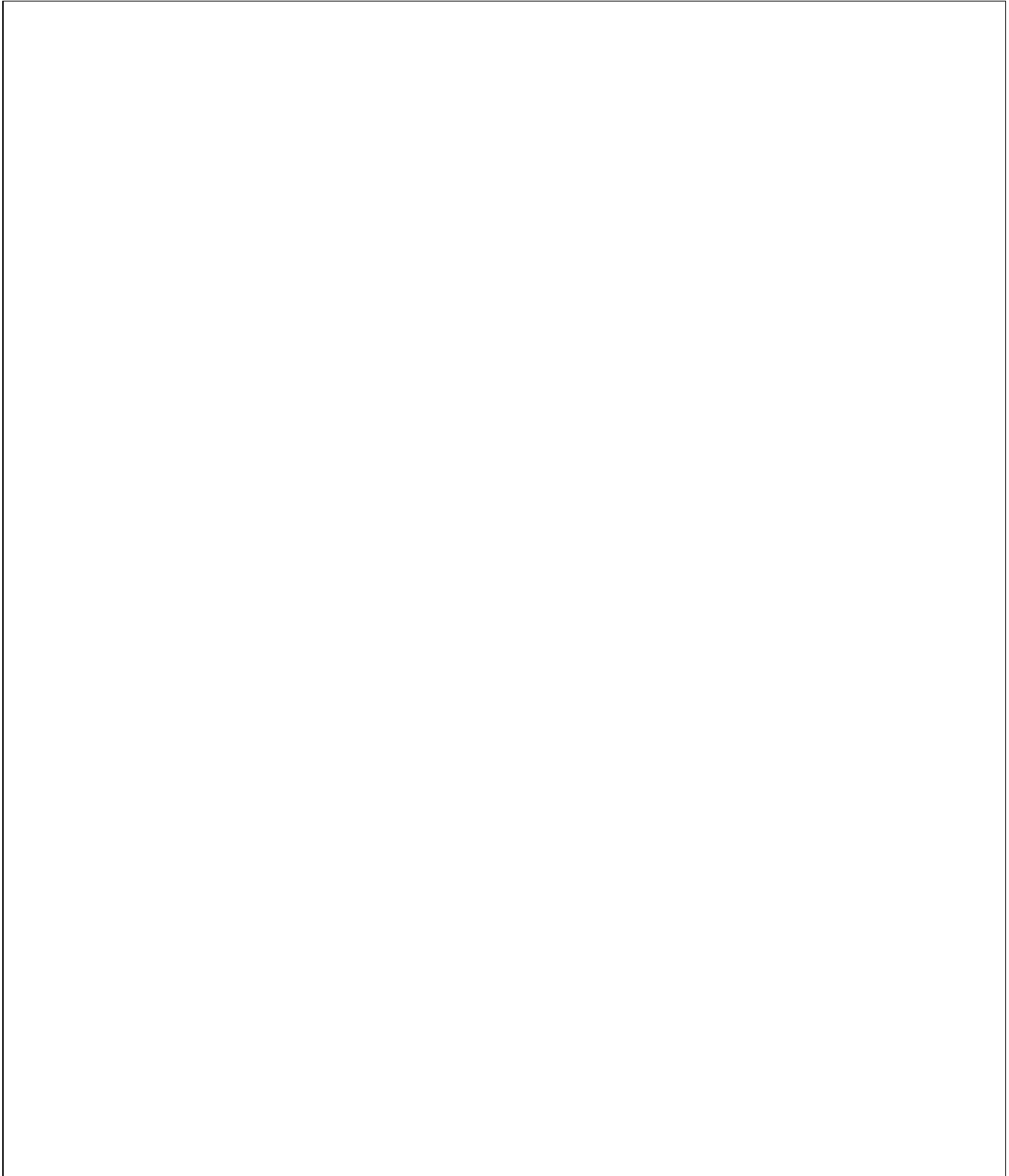


**שאלה 2.** תהיינה פונקציות  $f_n, f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות, לכל  $n \in \mathbb{N}$ . נניח  $f_n \rightarrow f$  במ"ש ב- $(0,1)$ . נתון בנוסף שכל פונקציה  $f_n$  חסומה.  
(א) (15 נק') הוכיחו  $\sup f_n \rightarrow \sup f$ .  
(ב) (12 נק') האם ייתכן  $\sup f_n = \inf f_{n+1}$  לכל  $n$  טבעי? תנו דוגמא או הוכיחו שזה לא ייתכן.



**שאלה 3.** (א) (14 נק') הראו כי הפונקציה  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$  מוגדרת לכל  $x \in \mathbb{R}$  ורציפה ב- $(0, 2\pi)$ .

(ב) (13 נק') האם קיימת פונקציה אינטגרבילית רימן  $g \in R(\mathbb{T})$  כך שטור פורייה שלה זה  $?\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$





**שאלה 4.** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית רימן בקטעים סגורים סופיים.

(א) (12 נק') נתון גם שאינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} f$  מתכנס. נגדיר  $\text{med}(f) = \{c \in \mathbb{R}: \int_{-\infty}^c f = \int_c^{\infty} f\}$ .

הוכיחו ש-  $\text{med}(f) \subset \mathbb{R}$  תת-קבוצה סגורה.

(ב) (15 נק') נניח גם ש-  $f$  רציפה ו-  $f \geq 0$ . נגדיר לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  פונקציה  $d_f(x, y) = \left| \int_x^y f(t) dt \right|$ .

הוכיחו כי  $d_f$  פונקציית מרחק (מטריקה) על  $X = \text{int}(Z)$  היכן ש-  $Z = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\}$ .

הערה: פנים וסגור הם ביחס למטריקה הרגילה ב-  $\mathbb{R}$ , כלומר  $d(x, y) = |x - y|$ .

