

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשפ"ה, מועד ב'
תאריך: 09.03.2025

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א'

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

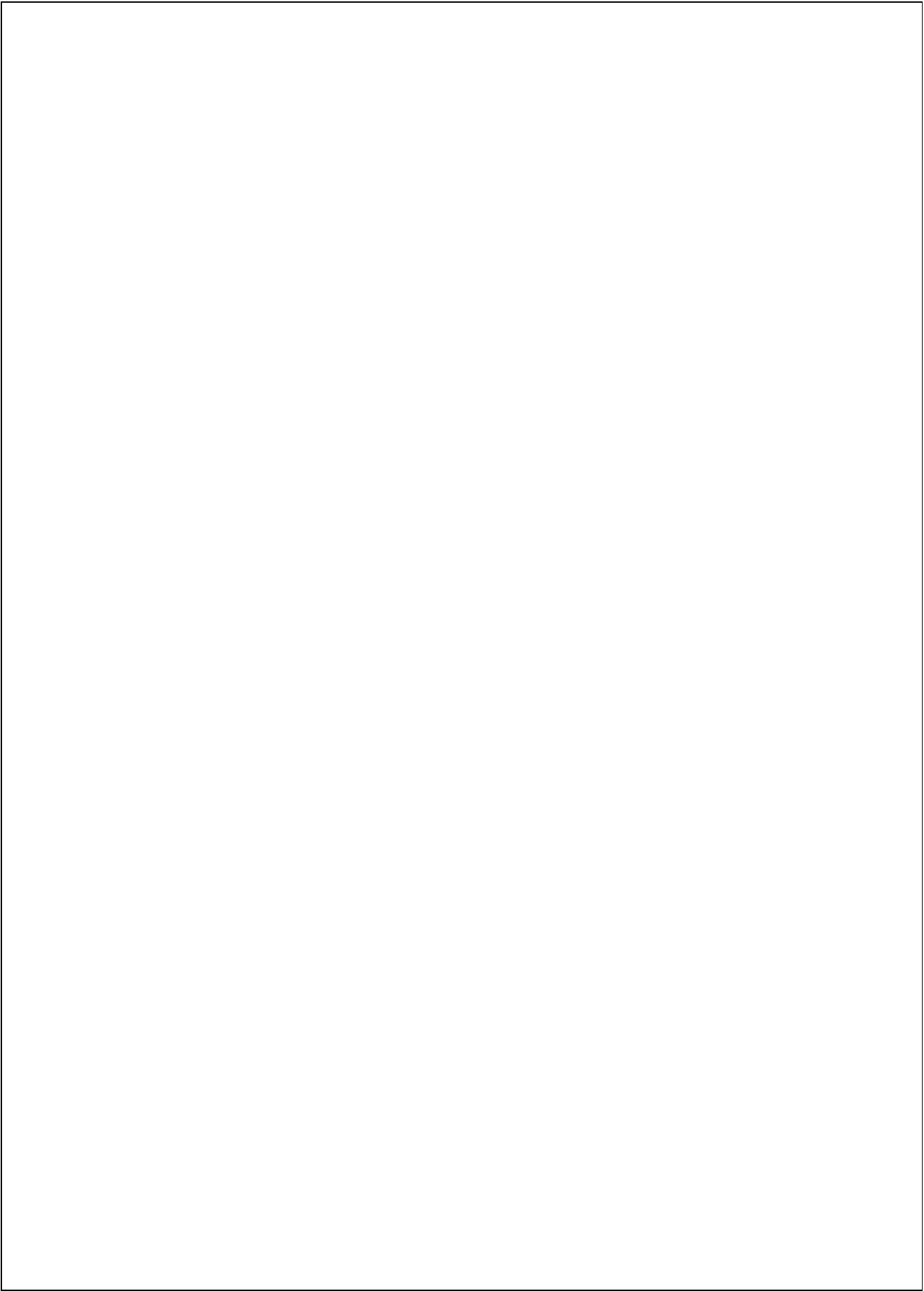
כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו את המשפט: יהיו (X, d) , (Y, ρ) מרחבים מטריים ותהי פונקציה $f: X \rightarrow Y$.

אזי f רציפה (סדרתית) בנקודה $x_0 \in X$ אם ורק אם

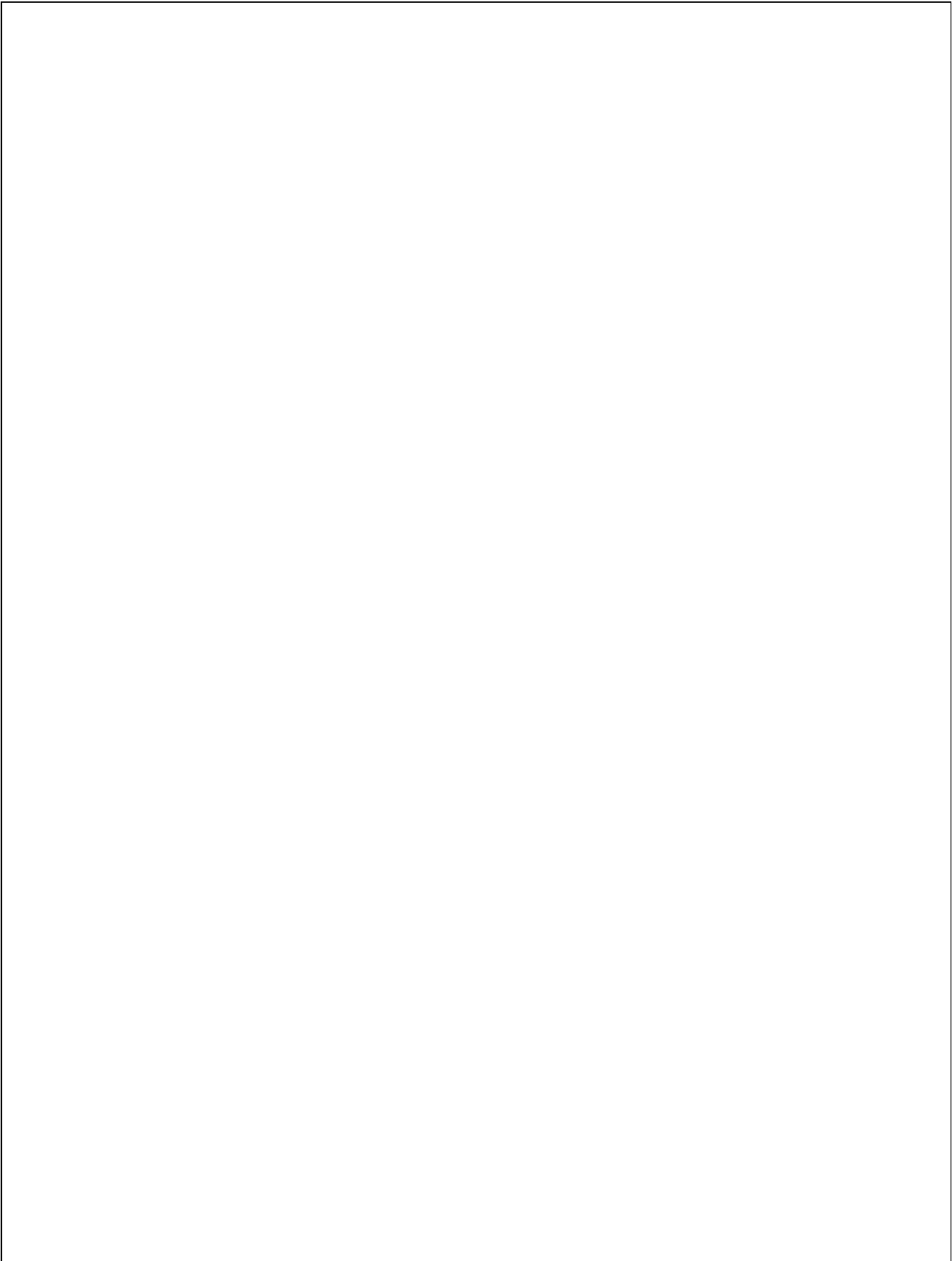
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$$

הערה: קודם ניסחו את ההגדרה של רציפות סדרתית בנקודה.



שאלה 2. (א) (5 נק') בהינתן נקודות $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ על ציר הממשי, כאשר $n \in \mathbb{N}$. רשמו נוסחה של פולינום (חזקות) מדרגה n כך ש- $P(x) \geq 0$ על הקטעים $(-\infty, x_1], [x_2, x_3], [x_4, x_5], \dots$ ו- $P(x) \leq 0$ על הקטעים $[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6], \dots$.

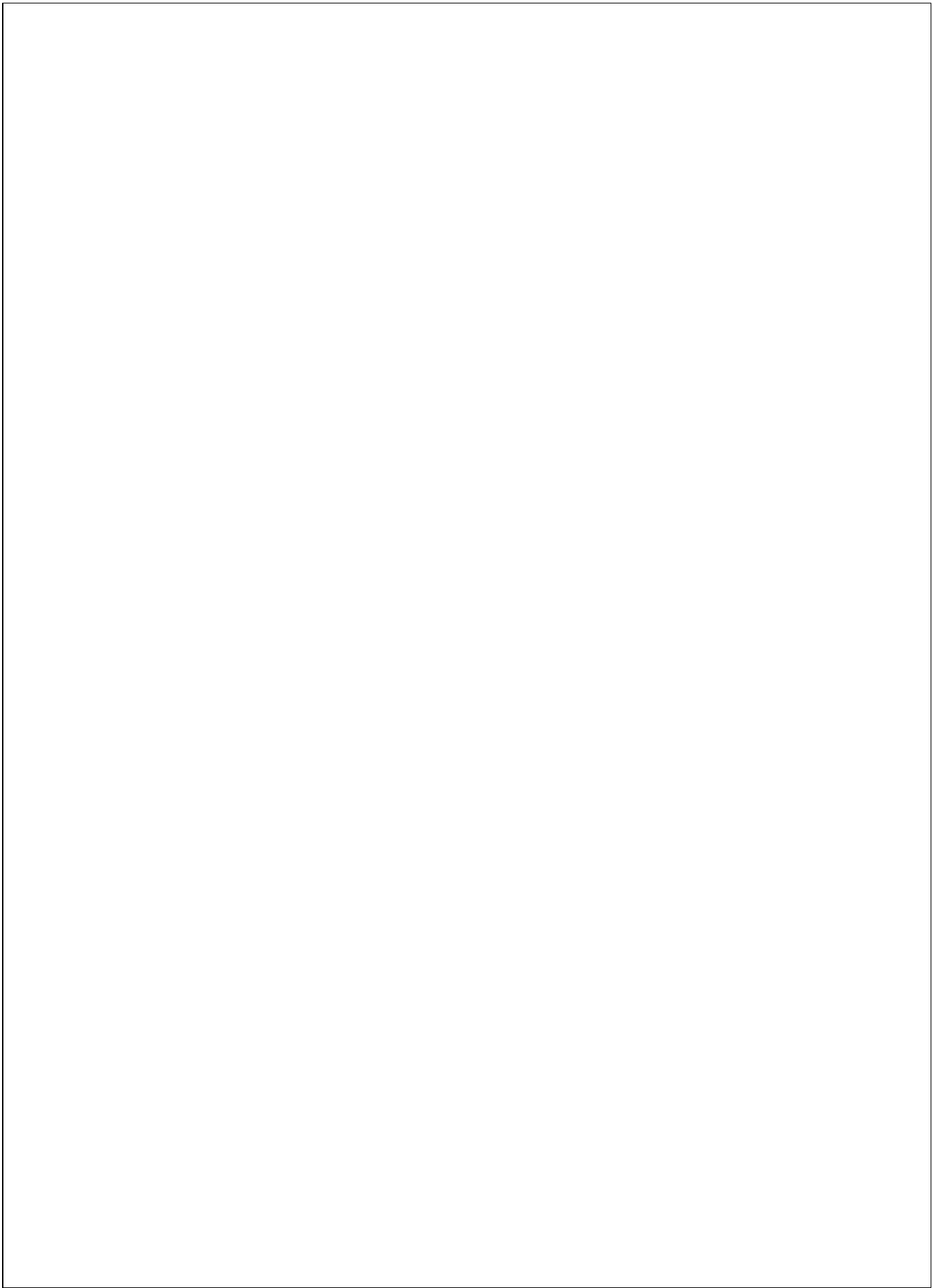
(ב) (22 נק') תהי פונקציה ממשית f רציפה בקטע סופי סגור $[a, b]$, ונניח כי $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$ לכל $n = 0, 1, 2, \dots, N$ עבור N טבעי. הוכיחו כי f מתאפסת לפחות $N + 1$ פעמים בקטע $[a, b]$.



שאלה 3. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, מחזורית ב- 2π , גזירה ברציפות. נתון ש- $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt < 2\pi$. הוכיחו כי:

(א) (12 נק') $\sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < 1$, כאשר $\hat{f}(n)$ מסמן מקדם פורייה בטור פורייה של f .

(ב) (15 נק') $\exists c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\int_0^{2\pi} |f(t) - c|^2 dt < 2\pi$.



שאלה 4. (א) (22 נק') תהי סדרת פונקציות ממשיות גזירות על $[0,1]$ כך ש-
 $\sup\{|f'_n(t)| : n \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1\} = M < \infty$. נניח בנוסף שקיימת נקודה x_0 ב- $[0,1]$ כך
 שהסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ חסומה. הוכיחו כי לסדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ יש תת"ס המתכנסת במ"ש על $[0,1]$.
(ב) (5 נק') הביאו דוגמה לסדרת פונקציות ממשיות המקיימת את תנאי סעיף א, אך לא תנאי נוסף,
 ואז אין לה תת"ס המתכנסת במ"ש על $[0,1]$.

