

אוניברסיטת תל-אביב הפקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשע"ה, מועד ב'
תאריך: 14/08/2015

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

המרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, מר אריה שאוס

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר:
- 1. דף נוסחאות אחד אישי דו-צדדי בגודל A4 (כתוב בכתב יד אישי).
- 2. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי, לא ניתן לתכנות).
- 3. דף עם משטחים ריבועיים – מצורף לטופס מבחן.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- אין להשתמש בשיטות אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
- תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה ב 25 נקודות.
- יש לרשום בראש המחברת הראשונה את מספרי השאלות שנפתרו.

בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין
מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

1. א. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5)}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$, או הוכיחו כי אינו קיים.

ב. (15 נק') נתונים האילוצים $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$ וכן $z = x + y + 1$, אשר מתקיימים בו-זמנית. בנוסף, נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x + y + z$. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של f תחת האילוצים.

2. א. (12 נק') נתונה הפונקציה: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|xy|} & x \neq 0 \text{ AND } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ OR } y = 0 \end{cases}$

חשבו את הפונקציות $f'_x(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$, תוך ציון תחום הגדרתן (דהיינו נקודות ב- \mathbb{R}^2 , בהן הנגזרת הרלוונטית קיימת).

ב. (13 נק') חשבו את מסת הקו הישר המחבר בין הנקודה $(3, 1)$ ל- $(-1, 3)$, כאשר הצפיפות הנקודתית על גבי הקו נתונה ע"י $\rho(x, y) = y^2$.

3. א. (10 נק') תהי $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. חשבו את כל הנגזרות הכיווניות $D_{\vec{v}} f(0, 0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right|_{(0,0)}$ כאשר $\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2)\| = 1$.

ב. (15 נק') חשבו את $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, כאשר $\vec{F} = (\sinh(x) + \cosh(y), x^2 y, z - y)$, והמשטח S הינו גרף הפונקציה $z = g(x, y) = |y|$ בתחום $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ (עם נורמל כלפי מעלה).

4. א. (10 נק') אמתו את קיום משפט שורץ ($f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$) עבור כל נקודה בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$.

ב. (15 נק') יהי $D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{R} \leq x^2 + y^2 \leq R \right\}$, כאשר $R \in (1, \infty)$. חשבו את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \text{ וכן את הגבול } I_R = \iint_{D_R} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dA$$

5. (25 נק') חשבו שטף של שדה $\vec{F} = (2xyz^3 - 3xy^2z^3, -y^2z^3, y^2z^3)$ אל תוך פני הגליל

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

הערה: יש לשים לב כי המשטח אינו סגור ומחוסר בסיסים עליון ותחתון.