

# אוניברסיטת תל-אביב

## הפקולטה להנדסה

בחינת מעבר, תשע"ה  
סמסטר ב' מועד א'  
תאריך: 29.06.2015  
משך הבחינה: 3 שעות  
לא תינתן הארכת זמן

### מבחן סוף סמסטר בקורס "משוואות דיפרנציאליות חלקיות" מרצים: ד"ר ללה דוראל, פרופ' דליה פישלוב, פרופ' יעקב יעקובוב

#### הוראות:

- יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
- מותר להשתמש במחשבון רגיל ללא תצוגה גרפית ולא ניתן לתכנות, בדף הנוסחאות המצורף לטופס. אין להשתמש בשיטות שלא נלמדו בקורס.
- אסורה אחזקת טלפונים סלולאריים וכל מכשיר אלקטרוני אחר בקרבת מקום.

#### **בהצלחה !**

#### שאלה מס' 1 (25 נק')

(אי-18 נק') לפתור בעיית הגלים הבאה:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin^2 x, \quad x \geq 0$$

$$u_t(x, 0) = \sin x, \quad x \geq 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

ולחשב  $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$  ו-  $u(\pi, \frac{\pi}{2})$ .

(בי-7 נק') יהי  $u(x, t)$  פתרון של משוואת החום עם תנאי שפה דיריכלה:

$$u_t = u_{xx}, \quad Q = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t < T\},$$
$$u(x, 0) = 2 - 2 \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

הוכיחו כי  $0 \leq u(x, t) \leq 2$  במלבן  $Q$  עם השפה.

### שאלה מס' 2 (25 נק')

אי-15 נק') נתונה המשוואה  $y^5 u_{xx} - y u_{yy} + 2u_y = 0$ ,  $y > 0$ . למיין את המשוואה, להביא לצורה קנונית ולמצוא פתרון הכללי של המשוואה.

באי-10 נק') יהי  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  פיתרון הבעיה  $\Delta u = -1$ ,  $(x, y) \in D$ ,  
 $u(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \partial D$ ,

בריבוע  $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$ . להוכיח ש- $\frac{1}{4} \leq u(0, 0) \leq \frac{1}{2}$ .

רמז: התבוננו בפונקציה  $v(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ .

### שאלה מס' 3 (25 נק')

אי-17 נק') נפתור את הבעיה

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = f(x) = |x|, \quad -\infty < x < \infty.$$

באי-8 נק') נתונה בעיה

$$u_t - 3u_{xx} = \sin(e^t), \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^x,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0.$$

בעזרת אינטגרל אנרגיה  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} u^2(x, t) dx$  הוכיחו כי הפתרון לבעיה יחיד.

### שאלה מס' 4 (25 נק') נתונה בעיית נוימן עבור משוואת פואסון

$$u_{xx} + u_{yy} = 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

אי-5 נק') בדקו שאכן קיים פתרון לבעיה.

באי-20 נק') פתרו את הבעיה. האם הפתרון יחיד?

רמז:  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$  בקואורדינאטות קוטביות.

### שאלה מס' 5 (25 נק') לפתור את בעיה החום הלא-הומוגנית

$$u_t = u_{xx} - \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + t \sin\left(\frac{5}{2}\pi x\right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right), \quad 0 < x < 1.$$