

אוניברסיטת תל-אביב

הפקולטה להנדסה

בחינת מעבר, תשע"ז
סמסטר ב' מועד א'
תאריך: 04.07.2017
משך הבחינה: 3 שעות
לא תינתן הארכת זמן

מבחן סוף סמסטר בקורס "משוואות דיפרנציאליות חלקיות" מרצים: ללה דוראל, אלון זילבורג, יעקב יעקובוב

הוראות:

- יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
- מותר להשתמש במחשבון רגיל ללא תצוגה גרפית ולא ניתן לתכנות, בדף הנוסחאות המצורף לטופס. אין להשתמש בשיטות שלא נלמדו בקורס.
- אסורה אחזקת טלפונים סלולאריים וכל מכשיר אלקטרוני אחר בקרבת מקום.

בהצלחה !

כל הזכויות שמורות ©

מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה מס' 1 (25 נק')

(א'-16 נק') לפתור בעיית הגלים הבאה:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad x \geq 0$$

$$u_t(x, 0) = \sin x, \quad x \geq 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

ולחשב $u(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

(ב'-9 נק') הוכיחו כי פתרון של הבעיה הבאה הוא יחיד ב- $x^2 + y^2 \leq 2$:

$$2\Delta u - u = \sin x, \quad x^2 + y^2 < 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = y, \quad x^2 + y^2 = 2$$

שאלה מס' 2 (25 נק')

(א' 15 נק') נתונה המשוואה $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = x^2 y$. למיין את המשוואה, להביא לצורה קנונית ולמצוא פתרון הכללי של המשוואה.

$$\begin{cases} \Delta u = -(x^2 + y^2), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad \text{פיתרון הבעיה } u \in C^2(D) \cap C(\bar{D}) \text{ יהי (ב' 10 נק')}$$

בריבוע $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$. להוכיח ש- $\frac{1}{6} \leq u(0, 0) \leq \frac{1}{12}$ (כאן $\bar{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$).

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{12}(x^4 + y^4)$.

שאלה מס' 3 (25 נק')

(א' 15 נק') לפתור את בעיית קושי למשוואת חום בעזרת נוסחת פואסון

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) = e^x, \quad -\infty < x < \infty.$$

(ב' 10 נק') נתונה בעיית קושי למשוואת גלים

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

כאשר $f(x), g(x)$ הינן פונקציות זוגיות. הוכיחו שגם הפתרון לבעיה זוגי ביחס ל- x .

שאלה מס' 4 (25 נק')

(א' 19 נק') נתון $\alpha < 1$ קבוע. מצאו פתרון לבעיה הבאה בקואורדינטות קוטביות

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\alpha}{r^2}u = 0, & 0 < \theta < \pi, 0 < r < 1, \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, & 0 \leq r \leq 1, \\ u_r(1, \theta) = \theta^2 - \pi\theta, & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

(ב' 6 נק') נתונה פונקציה הרמונית $u(x, y)$ בעיגול ברדיוס 1 סביב הראשית שערכה על שפת העיגול הוא $x^2 + a$. נתון כי $u(0, 0) = 0$. למצוא את a .

שאלה מס' 5 (25 נק')

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 3t^2 + e^{-\frac{25}{4}t} \sin\left(\frac{5}{2}x\right), & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = x + \sin\left(\frac{x}{2}\right), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = t^3, \quad u_x(\pi, t) = 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

רמז: לחפש "פונקצית תיקון" בצורה $w(x, t) = a(t) + b(t)x$.