אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה להנדסה

בחינת מעבר, תשע"ז
סמסטר ב' מועד ב'
תאריך : 04.08.2017
משך הבחינה : 3 שעות
לא תינתן הארכת זמן

<u>מבחן סוף סמסטר בקורס "משוואות דיפרנציאליות חלקיות"</u>
מרצים: ללה דוראל, אלון זילבורג, יעקב יעקובוב

<u>הוראות:</u>
1. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
2. מותר להשתמש במחשבון רגיל ללא תצוגה גרפית ולא ניתן לתכנות, בדף הנוסחאות המצורף לטופס . אין להשתמש בשיטות שלא נלמדו בקורס.
3. אסורה אחזקת טלפונים סלולאריים וכל מכשיר אלקטרוני אחר בקרבת מקום.

בהצלחה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

<u>שאלה מס' 1 (25 נק')</u>

(א'-13 נק') לפתור בעיית הגלים הבאה :

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = 4u_{xx}\ , \quad x > 0, t > 0 \\
&u(x,0) = x\cos x, \ \ x \ge 0 \\
&u_t(x,0) = x^3, \ \ x \ge 0 \\
&u(0,t) = 0, \ \ t \ge 0
\end{aligned}
$$

(ב'-12 נק') לפתור את בעיית קושי
$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\
u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & else \end{cases}
\end{cases}
$$

<u>שאלה מס' 2 (25 נק')</u>

(א'-15 נק') נתונה המשוואה $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0,\ \ x>0$. למיין את המשוואה, להביא לצורה קנונית ולפתור אותה.

(ב'- 10 נק') באמצעות שיטת אינטגרל האנרגיה להוכיח את יחידות הפתרון של בעיית התחלה-שפה דיריכלה למשוואת החום:

$$\begin{cases} u_t-7u_{xx}=xe^{xt}, & 0<x<2, t>0, \\ u(0,t)=\sin t,\ \ u(2,t)=2\cos t, & t\ge 0, \\ u(x,0)=x^2-x, & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

<u>רמז</u>: לבחור האנרגיה $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^2 w^2(x,t)dx$.

<u>שאלה מס' 3 (25 נק')</u>

(א'-10 נק') נניח $u(x,t)$ פתרון הבעיה
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x>0, t>0, \\ u(x,0)=x^3, & x\ge 0, \\ u_t(x,0)=x-x^2, & x\ge 0, \\ u_x(0,t)=0, & t\ge 0 \end{cases}$$
. למצוא $u(1,2)$.

(ב'-15 נק') יהי D תחום פתוח וחסום במישור, ∂D שפתו, $\overline{D}=D\cup\partial D$. תהי $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ פתרון לבעיית דיריכלה
$$\begin{cases} \Delta u+u_y-u^3=0,\ \ (x,y)\in D, \\ u=f(x,y),\ \ (x,y)\in\partial D \end{cases}$$
.

הוכיחו כי אם $f(x,y)\ge 0,\ \ \forall(x,y)\in\partial D$ אזי $u(x,y)\ge 0,\ \ \forall(x,y)\in D$. תסבירו מכאן גם המקרה $f(x,y)\le 0,\ \ \forall(x,y)\in\partial D$ והוכיחו גם כי אם $f(x,y)=0,\ \ \forall(x,y)\in\partial D$ אזי $u(x,y)=0,\ \ \forall(x,y)\in D$.

<u>שאלה מס' 4 (25 נק')</u>

(א'-20 נק') פתרו את הבעיה
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ \ 0<y<\frac{\pi}{2} \\ u(0,y)=0, \quad u_x(\frac{\pi}{2},y)=0, \quad 0\le y\le\frac{\pi}{2} \\ u_y(x,0)=x^2-\pi x, \quad u(x,\frac{\pi}{2})=\sin(7x), \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(ב'-5 נק') מה אומר עקרון המקסימום והמינימום לבעיה שבסעיף א'?

<u>שאלה מס' 5 (25 נק')</u> לפתור את בעיה הגלים הלא-הומוגנית

$$u_{tt}=u_{xx}+\pi\sin(\pi x), \quad 0<x<1,\ \ t>0,$$
$$u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0, \quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=1-\cos(\pi x),\ \ u_t(x,0)=2\pi\sin(2\pi x), \quad 0\le x\le 1.$$