בחינה במתמטיקה לסטטיסטיקאים-תואר שני

מועד א׳, סמסטר ב׳ תשע״ד 26.06.2014
פרופ׳ יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות, מחשב כיס וחוברת אינטגרלים.
ענה על 4 מהשאלות הבאות.
משך הבחינה 3 שעות.

1. (א׳) (9 נק׳) עבור מטריצה A נתון כי $A'A = A$. להוכיח כי מטריצה A סימטרית ו- $A^2 = A$.
להסיק מכאן ש- $A^n = A$ לכל n טבעי.

(ב׳) (8 נק׳) האם מטריצה $\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה עבור איזשהם מספרים α, β ו- γ ?
אם כן להביא דוגמא של המספרים, אם לא להוכיח.

(ג׳) (8 נק׳) נתונה מטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. להראות כי המטריצה חיובית למחצה אך לא חיובית.

2. (א) (13 נק׳) למצוא מלכסן אורתוגונלי P של מטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ב) (12 נק׳) למצוא פתרון ריבועים פחותים של מערכת משוואות לינאריות $Ax = b$ ולמצוא היטל אורתוגונלי של b, $proj_W b$, על מרחב עמודות W של A כאשר $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ו- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

3. (א) (14 נק׳) למצוא את ההיטל של פונקציה $f \in L_2(0,\pi)$ על $sp\{x, \sin x\}$. לרשום גם במפורש את המקדמים a ו- b בפירוק $ax + b\sin x$ של ההיטל.

(ב) (11 נק׳) למצוא QR-פירוק של מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (א) (10 נק') לחשב $\mu_0 = \min_{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^2 x + \alpha - \beta\cos x - \gamma\sin 4x|^2\, dx$.

הערה: אפשר להשתמש בזהות $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

(ב) (15 נק') נתונה פונקציה $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ מחזורית ב- 2π ונתון טור פוריה מרוכב שלה $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$. לחשב $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2\, dx$ דרך מקדמי טור פוריה הנתון.

רמז: להשתמש בשוויון פרסבל עבור פונקציה $f(x+\pi) - f(x)$.

5. (25 נק') להוכיח משפט על קירוב טוב ביותר לפונקציה מ- L_2 מרוכב במקרה פרטי: יהיו $g\in L_2(-\pi,\pi)$ ו- $f\in L_2(-\pi,\pi)$. נסמן מקדם של f ביחס ל- g ע"י t', כלומר $t' = \frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$. אזי המינימום $\mu = \min_{t\in\mathbb{C}} \|f - tg\|^2$ מתקבל כאשר $t = t'$ וערך המינימום $\mu = \|f - t'g\|^2 = \|f\|^2 - |t'|^2\|g\|^2$. כמו כן, פונקציה $f - t'g$ אורתוגונאלית לפונקציה g .

בהצלחה !!!