בחינה במתמטיקה לסטטיסטיקאים-תואר שני

מועד ב', סמסטר ב' תשע"ד 25.07.2014
פרופ' יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות, מחשב כיס וחוברת אינטגרלים.
ענה על 4 מהשאלות הבאות.
משך הבחינה 3 שעות.

1. (א') (10 נק') נתונה מטריצה אורתוגונלית A. להוכיח כי מטריצה $B = A^{-1}$ היא גם אורתוגונלית.

(ב') (8 נק') נתונות שתי מטריצות אורתוגונליות A_1 ו- A_2 מאותו סדר. להוכיח כי גם כפל A_1A_2 היא מטריצה אורתוגונלית.

(ג') (7 נק') נתונה מטריצה אורתוגונלית A. להוכיח כי $|A|=1$ או $|A|=-1$.

2. (א) (11 נק') נתונה מטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. האם היא חיובית למחיצה? האם היא חיובית?

(ב) (14 נק') למצוא QR-פירוק של מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. (א) (13 נק') הגדרנו נורמה ב- $L_2(-\pi,\pi)$ מרוכב כ- $\| f \| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | f(x)|^2 \, dx}$. האם הנוסחה $\| f \|_s = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} | f(x)|^2 \, (1+\sin^2 x)dx}$ מגדירה נורמה ב- $L_2(-\pi,\pi)$ מרוכב?

נזכיר כל התכונות של נורמה: (i) $\| f \| \ge 0$, ו- $\| f \| = 0 \iff f = 0$ ב- $L_2(-\pi,\pi)$; (ii) $\| \lambda f \| = |\lambda| \, \| f \|$; (iii) $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$.

(ב) (12 נק') להראות שמערכת $COS = \{\cos x, \cos(2x), \cos(3x), \ldots\}$ היא אורתוגונלית ב- $L_2(0,\pi)$ ממשי. האם המערכת היא בסיס ב- $L_2(0,\pi)$? לנמק את התשובה.

<u>הערה</u>: אפשר להשתמש בזהות $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.

.4 (א) (10 נק׳) לחשב $\mu_0=\min\limits_{\alpha,\beta\in\mathbb{C}}\int_{-\pi}^{\pi}\left||x|+\alpha\sin x-\beta\cos 8x\right|^2\,dx$.

(ב) (15 נק׳) ידוע כי $\widehat{e^{-x^2}}(\omega)=\dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$. לחשב $\widehat{e^{-9x^2-6x-1}}(\omega)$ ו- $\widehat{xe^{-x^2}\cos x}(\omega)$.

.5 (25 נקודות) להוכיח שוויון פרסבל מוכלל: אם $f,g\in L_2(-\pi,\pi)$ ונתונים טורי פוריה, למשל, מרוכבים

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(f)e^{inx},\qquad g\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(g)e^{inx}$$

אז $\langle f,g\rangle=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(f)\overline{c_n(g)}$.

בהצלחה !!!