

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan(x)}{1 - \cos(x)} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin(x)} \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \cos(3x) \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} \quad (\text{ז})$$

2. תהי f פונקציה גזירה פעמיים בסביבה של x . הוכח כי:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) \quad (\text{ב})$$

3. מצא את פיתוח טיילור סביב הראשית של הפקונציות הבאות:

$$\ln(x+1) \quad (\text{א})$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad (1+x)^\alpha \quad (\text{ב})$$

$$\sinh(x) \quad (\text{ג})$$

$$\cosh(x) \quad (\text{ד})$$

4. חשב בעזרת טורי טיילור את הביטויים הבאים עד כדי שגיאה של $\epsilon = 10^{-3}$:

$$\sin 1 \quad (\text{א})$$

$$\sqrt{e} \quad (\text{ב})$$

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) \quad (\text{ג})$$

5. חשב בעזרת קירוב טיילור את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{[\ln(1+x)]^2} \quad (\text{ג})$$

6. נניח כי $f(x)$ בעלת פיתוח טיילור בכל \mathbb{R} ונניח שקיים קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ $\emptyset \neq I$ כך ש $f(x) = 0$ לכל $x \in I$.

הוכח ש $f(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

7. נניח כי $f(x)$ בעלת פיתוח טיילור בכל \mathbb{R} וידוע ש $|f^{(n)}(0)| \leq M$ לכל $n \geq 0$ כאשר M קבוע כלשהוא. הראה כי $|f(x)| \leq Me^{|x|}$.

8. (*) הוכח כי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{e \cdot n!\} = 0$ כאשר $\{x\}$ מייצג את הערך השברי של המספר.

9. (*) השתמש ברוח שאלה 8 כדי להראות ש $e \notin \mathbb{Q}$ (מגניב!)