

תרגיל 14 - חדווא'ב'

17 בינואר 2011

1. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים, ואם כן מצאו את הגבול שלהם:

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \quad (\text{א})$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{x^{3/2}} \quad (\text{ב})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1} \quad (\text{ג})$$

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{1/3}} \quad (\text{ד})$$

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-1} dx \quad (\text{ה})$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} \quad (\text{ו})$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} \quad (\text{ז})$$

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x dx \quad (\text{ח})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \quad (\text{ט})$$

2. הוכח שלגוף סיבוב המתקבל ע"י הגרף $y = \frac{1}{x}$ כאשר $x \geq 0$ (Gabrial's Horn):

(א) יש נפח סופי, וחשבו.

(ב) יש שטח פנים אין-סופי. (רמז: הראה כי $\int_1^t \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^4}\right)} dx > 2\pi \ln t$)

3. עבור אילו ערכי $p \in \mathbb{R}$

(א) האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס?

(ב) האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס?

4. הוכח או הפרך:

(א) אם $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(ב) אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ אז $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ מתכנס.

(ג) אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ אזי $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.

(ד) אם $f(x) \leq e^{-x}$ לכל $x \geq 0$ אזי $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.

(ה) אם $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ לכל $x \geq 0$ אזי $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.