

## תרגיל בית 2 - חדוו"א 1'ב' לפיסיקאים

27 באוקטובר 2010

1. הוכח ש

- (א) סכום וכפל של מספרים רציונלים הוא רציונלי.  
(ב) בין כל שתי מספרים רציונלים קיים מספר רציונלי נוסף ביניהם. (אין לרציונלים נקודות מבודדות).

2. הוכח שהמספרים הבאים הם אי-רציונלים:

(א)  $\sqrt[3]{3}$

(ב)  $\log_2 3$

3. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- (א) אם  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (מספרים אי רציונלים) אז  $ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
(ב) אם  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  וגם  $b \in \mathbb{Q}$  אז  $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
(ג) אם  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (מספרים אי רציונלים) אז  $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
(ד) חיתוך סופי (לא ריק) של קטעים פתוחים הוא קטע פתוח. (רמז: אינדוקציה)  
(ה) חיתוך כלשהו של קטעים פתוחים הוא קטע פתוח.  
4. מצא עבור היחסים הבאים אם הם יחס שקילות, ואם כן תאר את מחלקות השקילות:

(א)  $R$  היחס ב- $\mathbb{R}$  המוגדר ע"י:  $|a| = |b| \iff aRb$ .

(ב) היחס "להיות מאונך ל-" בקבוצת הישרים במישור.

(ג) היחס "להיות מקביל ל-" בקבוצת הישרים במישור.

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

ב. אי שיוויון ברנולי:  $(1+a)^n \geq 1+na$  לכל  $a \geq -1$

ג.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ד.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$

ה.  $7^n - 2^n$  מתחלק ב-5.

ו.  $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$  לכל  $x$  ממשי. (רמז: חפשו זהות טריגונומטרית שימושית)

6. חשבו את הסכומים הבאים:

א.  $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$   
ב.  $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2$   
ג.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

7. הוכיחו באינדוקציה את אי-שוויון המשולש המוכלל: לכל  $n$  מספרים ממשיים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  מתקיים:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$