

תרגיל 3 - חדווא 1ב' לפיסיקאים

3 בנובמבר 2010

1. מצאו \inf, \sup, \min, \max (אם קיימים) של הקבוצות הבאות:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{א})$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{2n+3}{2n+5} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{ב})$$

$$C = \left\{ \frac{n^{1+(-1)^n}}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{ג})$$

$$D = \{ (-1)^n (5 - 4^{-n}) : n \in \mathbb{N} \} \quad (\text{ד})$$

$$E = \{ x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \geq 2 \} \quad (\text{ה})$$

2. בדקו האם הסדרות הבאות חסומות מלעיל ו/או מלרע:

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} \quad (\text{א})$$

$$b_n = \ln(n+1) - \ln(n) \quad (\text{ב})$$

3. תהי $X \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה ונגדיר $-X = \{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in X \}$. הוכח: $\sup X = -\inf(-X)$.

4. הוכח ע"י שימוש בהגדרת הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4 + \sqrt{n}} = 0 \quad (\text{ג})$$

5. השתמש בהגדרת הגבול ורשום הגדרה לסדרה שאינה מתכנסת לגבול. השתמש בהגדרה זו כדי להוכיח:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1 \quad (\text{א})$$

(ב) לסדרות הבאות אין גבול:

$$\begin{aligned} &\text{i. } \{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty} \\ &\text{ii. } \left\{ \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) \right\}_{n=0}^{\infty} \end{aligned}$$

6. הוכח שלכל סדרה מתכנסת (בעלת גבול סופי) יש מקסימום או מינימום או שניהם. הבא דוגמא לכל אחד משלושת המקרים האפשריים.

7. הוכח או הפרך (ע"י דוגמא נגדית) את הטענות הבאות:

(א) גבול של סדרה של מספרים רציונלים הוא רציונלי.

(ב) אם a_n סדרה מתכנסת אז $|a_n|$ מתכנסת.

(ג) אם $|a_n|$ סדרה מתכנסת אז a_n מתכנסת.

8. הוכח שאם a_n סדרה שכל איבריה אי-שליליים ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

9. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן רקורסיבי ע"י $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2$, כאשר $a_0 > 0$. מצא תנאי על a_0 כך שהסדרה תתכנס וחשב את גבול הסדרה.

10. חשב את הגבולות (אין צורך להוכיח ישירות לפי הגדרת הגבול). אפשר להשתמש בכלים אחרים כמו אריתמטיקה של גבולות וכלל הסנדוויץ. נמק את חישוביך):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{5n^2 - 4n - 1} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n \sin n - \cos n}{2n^2 + \sqrt{n}} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 + \cos n}{n}} \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 4^n + 3^n} \quad (\text{ה})$$