תרגיל 4 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

10 בנובמבר 2010

1. חשבו את הגבולות במובן הרחב (כלומר כולל $\pm\infty$) של הסדרות הבאות:
   (א) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$
   (ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}$
   (ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+5}{4n+1}\right)^n$
   (ד) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n+5}{n^2-5n}\right)^n$
   (ה) $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}$, $q\in\mathbb{R}$
   (ו) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$, $a>0$
   (ז) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ (כאשר: $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n$)
   (ח) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$
   (ט) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$
   (י) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}$, $q>1$

2. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ הוכח או הפרך:
   (א) אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L<0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=-\infty$.
   (ב) אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L\neq\pm\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+b_n=\infty$.
   (ג) אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ אז הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ קיים.
   (ד) אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ והגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ קיים, אז $-\infty<\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n<\infty$.
   (ה) אם $|b_n|<c<\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}|a_nb_n|=\infty$.
   (ו) אם $0<c<|b_n|$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}|a_nb_n|=\infty$.

3. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$סדרה כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$ הוכח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

4. תהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלרע, הוכח שקיימת סדרה $\{a_n\}_{n=0}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ אז $a_n\in A$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf A$

5. נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ונתון $x \in \mathbb{R}$.
הסתמכו על העובדה ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ והוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$.
הבחינו בין המקרים הבאים: $x > 0,\ x < 0,\ x = 0$.
רמז: עבור $x < 0$ הגדירו $y = -x$ והוכיחו כי $1 - \frac{y^2}{n} \leq \left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n \leq 1$ ע"י אי־שיוויון ברנולי מתרגיל מס' 1.

6. עבור הסדרות הבאות רשום את כל הגבולות החלקיים במובן הרחב, ותן דוגמא לתת סדרה מתכנסת, ותת סדרה מונוטונית.

(א) $(-1)^n + \frac{1}{n}$
(ב) $\cos(\frac{n}{3}\pi)$
(ג) $n\cos(\frac{n}{4}\pi)$
(ד) $(-\frac{1}{2})^n$

7. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הוכיחו את הטענות הבאות על גבולות חלקיים:

(א) L הוא גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם ורק אם בכל סביבה של L קיימים אינסוף איברים מהסדרה.
(ב) נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = L$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = L$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.
(ג) הוכיחו שאם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה מלרע, אז יש לה תת־סדרה המתכנסת ל־ $-\infty$.

8. תן דוגמא לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־

(א) ל־ a_n אין סוף גבולות חלקיים
(ב) $(\star)$ $PL(\{a_n\}) = [0,1]$ (יש לנמק את הפתרון!)