תרגיל 5 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:
   (א) $\sqrt[n]{n!}$
   (ב) $(1+n)^{\frac{1}{n}}$
   (ג) $\sqrt[n]{2^n+3^n}$
   (ד) $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ (כאשר: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ו־ $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$ לכל $n,k\in\mathbb{N}$)

2. חשבו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה הבאה: $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2}+(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
   מה הם $\liminf(a_n)$, $\limsup(a_n)$?

3. הוכח:
   (א) אם $\lim\limits_{n\to} a_n=L>0$ ו b_n סדרה אז $\limsup(a_n\cdot b_n)=L\cdot\limsup(b_n)$
   (ב) לכל סדרה a_n מתקיים $\liminf(a_n)=-\limsup(-a_n)$
   רמז: השתמשו בשאלה 3 מתרגיל 3.
   (ג) אם $\limsup|a_n|=0$ אז $\lim a_n=0$

4. הוכח:
   (א) לכל סדרות a_n ו־ b_n אז $\limsup(a_n+b_n)\le\limsup(a_n)+\text{limsup}(b_n)$
   (ב) אם $a_n\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $\limsup(a_n)\le\limsup(b_n)$
   (ג) הסיקו מ־ (3ב)+(4ב) שאם $a_n\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $\liminf(a_n)\le\liminf(b_n)$
   (ד) אם $\limsup|a_n|\le\epsilon$ אז $\limsup a_n\le\epsilon$ וגם $\liminf a_n\ge-\epsilon$

5. א. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת של מספרים שלמים. הוכיחו שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך שהסדרה $\{a_n\}_{n=\mathrm{m}}^{\infty}$ קבועה.
   ב. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מחזורית אם קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n=a_{n+k}$. הוכיחו שסדרה מחזורית היא מתכנסת אם ורק אם היא קבועה.

6. הוכיחו או הפריכו את התכנסות הסדרות הבאות **באמצעות קריטריון קושי בלבד**:
   (א) $a_n=(-1)^n$,
   (ב) $a_n=n+\frac{(-1)^n}{n}$,
   (ג) $a_n=\frac{n+1}{4n^2+3}$.

7. הוכיחו באמצעות קריטריון קושי:
   (א) הסדרה $a_n=\frac{1+1}{1^2\cdot3^1}+\frac{2+1}{2^2\cdot3^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2\cdot3^n}$ מתכנסת לגבול סופי.
   (ב) הסדרה $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ מתכנסת ל־$+\infty$(הפריכו את התכנסותה לגבול סופי והסיקו התכנסות ל־ $+\infty$).

8. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חסומה כלשהיא. נגדיר: $A=\{|a_n-a_m|:n\ne m\in\mathbb{N}\}$. הוכח או הפרך:
   (א) $\inf A=0$
   (ב) $\sup A$ סופי
   (ג) $\max A$ קיים

9. הבא דוגמא לסדרה חסומה ללא גבול המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$.

10. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{2^n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת לגבול סופי.