

תרגיל 6 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

בשיעורי בית אילו יש שימוש בפונקציות המוגדרות כך:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(פונקציות אילו נקראות סינוס וקוסינוס היפרבולי)

1. נסמן $f(x) = e^x$ ו- $g(x) = x^3$. רשום נוסחאות מפורשות עבור $f \circ f, g \circ g, f \circ g, g \circ f, f \circ g \circ f, g \circ f \circ f$.

2. מצא את התחום הגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x\sqrt{\sin(2x)} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ג})$$

3. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

תזכורת: התמונה של $A \subseteq \mathbb{R}$ ע"י פונקציה f הינה הקבוצה: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

תזכורת: התמונה ההפוכה של $A \subseteq \mathbb{R}$ ע"י פונקציה f הינה הקבוצה: $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$

מצאו את:

$$f([0, 1]) \quad (\text{א})$$

$$f([1, \infty)) \quad (\text{ב})$$

$$f([0, \infty]) \quad (\text{ג})$$

$$f^{-1}((0.1, 1)) \quad (\text{ד})$$

$$f^{-1}((0, 1)) \quad (\text{ה})$$

$$f^{-1}([0, 1]) \quad (\text{ו})$$

4. בדקו האם הפונקציות הבאות הן חח"ע (בתחום ההגדרה הטבעית), ואם כן מצאו את הפונקציות ההפוכות להן. כמו כן ציינו אם

הפונקציה מונוטונית, ורשמו תחומי עליה וירידה:

$$1 - x^3 \quad (\text{א})$$

(ב) $\sinh(x)$ (רמז: הוכח קודם ש $\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$). אין צורך למצוא הופכי באופן מפורש.

$$|x^3 - 1| \quad (\text{ג})$$

(ד) $[x]$ (פונקציית החלק השלם של מספר)

(ה) $x - [x]$ (פונקציית החלק השברי של מספר)

5. הוכח ש:

(א) אם $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, אז $f(0) = 0$.

(ב) סכום ומכפלה של פונקציות זוגיות הוא זוגי. סכום של פונקציות אי-זוגיות הוא אי-זוגי.

(ג) מכפלה של פונקציות אי-זוגיות הוא זוגי, מכפלה של פונקציה זוגית ואי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

(ד) כל פונקציה אפשר לרשום כסכום של פונקציה זוגית ואי-זוגית

6. הוכיחו את הגבולות הבאים לפי הגדרה $(\epsilon - \delta)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{4x-7} = 6 \quad (\text{א})$$

$$(a \neq 0) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad (\text{ב})$$

$$(a \geq 0) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a) \quad (\text{ד}) \quad \text{רמז: לכל } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ מתקיים } 0 \leq \sin(x) \leq x$$

7. חשבו את הגבולות הבאים: (אפשר להשתמש בכל המשפטים שלמדת כגון אריתמטיקה, וכלל הסנדוויץ')

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3)-(1+3x)}{x^4-x} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{ד})$$

8. הגדרה - גבול של פונקציה באינסוף: $L \in \mathbb{R}$ הוא הגבול של f באינסוף, ומסמנים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, אם:

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \geq M |f(x) - L| \leq \epsilon$$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x}) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^3)-(1+3x)}{x^4-x} \quad (\text{ב})$$

9. הוכח או הפרך:

(א) אם $f(x) \geq 0$ לכל x בסביבה מנוקבת כלשהיא של $a \in \mathbb{R}$, וגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ אז $A \geq 0$.

(ב) אם $f(x) > g(x)$ לכל x בסביבה מנוקבת של a אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

(ג) אם $f(x)$ חסומה בסביבה של $a \in \mathbb{R}$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

10. מצאו פונקציה $f(x)$ כך שהגבול של הסדרה $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ קיים, אבל $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ לא קיים. הוכיחו שהמצב ההפוך לא יתכן.