

## תרגיל 7 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

2 בדצמבר 2010

1. בדוק את הרציפות של הפונקציות הבאות. אם הפונקציה איננה רציפה אז רשום מה נקודות אי הרציפות ומיין אותן:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\mathbb{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\ln(x)) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{ה})$$

(ו)  $f(x) = \{x\}$  (הערך השברי של  $f$ )

(ז)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|}$

2. יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות. הוכח ש-  $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  ו-  $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  רציפות

3. תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה כך ש-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  אז  $f$  מקבלת מקסימום או מינימום.

4. נניח ש  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה כך ש  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . הוכח שהפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

רציפה ב  $\mathbb{R}$ .

5. תהי  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה רציפה. הוכח שקיים  $x_0 \in [0, 1]$  כך ש  $f(x_0) = x_0$ .

6. תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה בעלת מחזור  $2\pi$ . (כלומר, לכל  $x \in \mathbb{R}$   $f(x + 2\pi) = f(x)$ ). אז קיים  $x_0$  כך ש  $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ . (כלומר, קיים נקודה על קו המשוואה, כך שהטמפרטורה שם זהה לטמפרטורה בצידו השני של העולם.)

7. הראה שלמשוואה  $x^3 - 3x + 1 = 0$  יש שלושה פתרונות ממשיים.

8. תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכח או הפרד:

(א)  $f$  רציפה  $\iff f^2$  רציפה.

(ב)  $f \circ f$  רציפה  $\iff f$  רציפה.

(ג)  $f(x)$  רציפה  $\iff f(x^3)$  רציפה.

9. (\*) מצא פונקציה שרציפה בנקודה אחת בדיוק.