

תרגיל 8 - חדווא 1 לתלמידי פיסיקה

8 בדצמבר 2010

1. קבע אם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש (והוכח):

- (א) $f(x) = \sin(x)$ ב \mathbb{R}
- (ב) $f(x) = x^2$ ב $[-1, 1]$
- (ג) $f(x) = x^2$ ב \mathbb{R}
- (ד) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ב $(0, 1)$
- (ה) $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ ב $(0, \infty)$
- (ו) $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ב $(0, \infty)$ (*)

2. הראה ש $\ln(x)$:

- (א) לא רציפה במ"ש ב $(0, 1)$.
 - (ב) רציפה במ"ש ב $[1, \infty)$. (רמז: השתמשו באי-השוויון: $e^x > 1 + x$)
3. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ עבור איזהשהו קבוע L . הוכח ש f רציפה במ"ש ב \mathbb{R} .
4. יהיו f, g פונקציות רציפות במ"ש. הוכח או הפרד:

- (א) $f \cdot g$ רציפה במ"ש.
- (ב) $f \circ g$ רציפה במ"ש.

5. גזרו את הפונקציות הבאות ע"פ הגדרת הנגזרת כגבול:
 א. $\frac{1}{x^2+2}$ ב. $\frac{1}{\sin(x)}$ ג. $\sin(3x)$ ד. $\sin^2(x)$.

6. קבעו ע"פ הגדרת הנגזרת כגבול אם קיימת נגזרת ב- x_0 . אם קיימת חשבו אותה:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } x_0 = -1, f(x) = 2x^3 - 3x^2 & \text{ב. } x_0 = 0, f(x) = |x| \\
 \text{ג. } x_0 = 0, f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} & \text{ד. } x_0 = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

ה. $x_0 = 1, f(x) = \sqrt{x}$

7. גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} & \text{ב. } f(x) = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2) & \text{ג. } f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}} \\
 \text{ד. } f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} & \text{ה. } f(x) = 2 \sin^3(4x) + 3 \sin(4x) & \text{ו. } f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \\
 \text{ז. } f(x) = \ln(\ln(3 - 2x^3)) & \text{ח. } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} & \text{ט. } f(x) = \sin(\sqrt{1 + e^x})
 \end{array}$$

8. השתמשו בגזירה לוגריתמית לגזירת הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = x^x & \text{ב. } f(x) = e^{\sin(x)} & \text{ג. } f(x) = \cos(x)^{\sin(x)} \\
 \text{ד. } f(x) = (\arctan(x))^x & \text{ה. } f(x) = 3^{\cot(\frac{1}{x})} &
 \end{array}$$

9. מצאו מקדמים a, b כך שהפונקציה $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < 0 \\ a \sinh(x) + b \cosh(x) & x \geq 0 \end{cases}$ תהיה גזירה ברציפות בכל \mathbb{R} . האם קיימים מקדמים כך שהפונקציה תהיה גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ?