חדו"א 1ב' ־ תרגיל מספר 9

1. מצא ביטוי כללי לנגזרת מסדר n של $sin(x)$, $\cos(x)$, e^x,$ln(1-x)$, והוכח באינדוקציה.

2. תהיינה f, g פונקציות גזירות ב־ $\mathbb{R}$ המקיימות $f(0) = g(0)$ ו־ $f'(x) < g'(x)$ לכל $x \geq 0$. הוכח כי $f(x) \leq g(x)$לכל $x \geq 0$. הסק ש $\sin(x) \leq x$ לכל $x \geq 0$.

3. תהי $f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$. הוכח שזו פונקציה גזירה n פעמים ב־0, עבור $n \geq 1$.

4. חשבו:

   (א) א. $(arcctg(x))'$ ($arcctg(x)$ היא הפונקציה ההפוכה של $ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$),

   (ב) ב. $(arccosh(x))'$ ($arccosh(x)$ היא הפונקציה ההפוכה של $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$).

5. א. מצאו את הנקודות בהן המשיק לפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ מקביל לציר x.

   ב. רשמו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3$ בנקודה $x = -\frac{1}{2}$.

6. מצא את נקודות המינימום והמקסימום הגלובליות בפונקציות הבאות, בתחום המבוקש.

   (א) $f(x) = |x+1| + |x-1|$בקטע $[-2, 2]$.

   (ב) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ בקטע $[0, 3]$

   (ג) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ ב $\mathbb{R}$.

7. הוכח את האי שיוונים הבאים:

   (א) $ex \leq e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$

   (ב) $x \leq tan(x)$ בקטע $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

   (ג) $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$

   (ד) $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ עבור $x \geq 0$

   (ה) $ab \leq e^a + b\ln(\frac{b}{e})$ עבור $a, b > 0$

8. תהי fפונצקיה כך שלכל $x \in [a, b]$ $f''(x) > 0$ אז הוכח כי $f(x)$ מקבלת מקסימום ב־$[a, b]$ באחד מקצוות הקטע.

9. הוכח או הפרך:

   (א) תהיה $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b), כך שנגזרתה חסומה בקטע אז הפונקציה חסומה בקטע.

   (ב) אם f פונצקיה גזירה וחסומה בקטע $[a, b]$ אז נגזרתה חסומה בקטע.

10. הוכח:

   (א) $f'(x) = a \iff f(x) = ax + b$

(ב) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה n פעמים ($n\in\mathbb{N}$). הוכיחו כי $f^{(n)}\equiv 0$ (הנגזרת ה־n־ית של f היא פונקצית ה־0) אם ורק אם f היא פולינום מדרגה קטנה או שווה $n-1$.

11. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(0)=a$ ו־$f(x+y)=f(x)+f(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f(x)=ax$.