פתרונות נבחרים לתרגיל 1 - חדווא 1ב

27 באוקטובר 2010

1.(ג) נניח כי $x \in (A \cap B) \cup C$ אז $x \in C$ או $x \in A \cap B$.
נטפל במקרה הראשון: $x \in C$, אז $x \in B \cup C$ וגם $x \in A \cup C$, ולכן $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ וסיימנו.
כעת נטפל במקרה שני: $x \in A \cap B$, אז $x \in A$ וגם $x \in B$. לכן $x \in B \cup C$ וגם $x \in A \cup C$, ושוב נקבל כי $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
כלומר, בכל מקרה $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$
ולכן הוכחנו כי $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
כעת נותר עוד להראות את הכיוון השני: $(A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
מראים זאת באופן דומה.

4. נניח ש: e_1, e_2 הם איברי (מקיימים את האקסיומה השלישית של החבורה). אז מכך ש: e_1 איבר יחידה נובע כי: $e_1 \cdot e_2 = e_2$ ומכך ש: e_2 איבר יחידה נובע כי: $e_1 \cdot e_2 = e_1$ ולכן : $e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1$

5. יהיו $x, y \in G$. נחפש איבר $z_1 \in G$ כך ש $z_1 \cdot x = y$. לפי האקסיומה הרביעית של חבורה, ל־x יש איבר הופכי שנסמנו x^{-1}. כלומר, מתקיים $x^{-1} \cdot x = e$ ולכן $y \cdot x^{-1} \cdot x = y \cdot e = y$ ולמעשה מצאנו את האיבר המבוקש: $z_1 = y \cdot x^{-1}$.
באותו אופן, נוכל למצוא ש: $z_2 = x^{-1} \cdot y$.

8.(ב) כאמור ניתן לפתור את אי־השיוויון, אבל זה לא הכרחי.
צריך רק למצאו $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ אי־השיוויון מתקיים.
נעשה זאת באופן הבא:

$$|\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1}| = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1} = \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1}\right) \frac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n^2+3-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{4}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}}.$$

כעת נשים לב כי: $\sqrt{n^2+3} > \sqrt{n^2} = n$ ולכן גם: $\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2-1} > n$
ונוכל להציב את זה בביטוי הקודם ולקבל כי: $|\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1}| < \frac{4}{n}$
אם נדרוש שיתקיים $\frac{4}{n} < \epsilon$ הרי שבוודאי יתקיים גם: $|\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1}| < \epsilon$
לכן נוכל לבחור מספר טבעי $N_0 \in \mathbb{N}$ המקיים $N_0 > \frac{4}{\epsilon}$ ונקבל את המבוקש.