חדו"א 1ב' - פתרונות לתרגיל מספר 10

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל:

(א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+2x^2-x-2}=\lim\frac{3x^2+6x-1}{3x^2+4x-1}=\lim\frac{6x+6}{6x+4}=\lim\frac{6x}{6x}=1$

(ב) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot cos(x^2)}{1}=\lim\limits_{x\to0}2x\lim\limits_{x\to0}cos(x^2)=0$

(ג) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arctan(x)}{1-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x)-\frac{x}{1+x^2}}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x)}{\sin(x)}-\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(1+x^2)cos(x)}-1=0$

כאשר השתמשנו בכך ש: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=0$

(ד) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^x}{2\cos(x)-x\sin(x)}=1$

(ה) לא צריך לופיטל

(ו) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)\cos(3x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)\cos(3x)}{\cos(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin(3x)}{-\sin(x)}=-3$

(ז) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin(x)\ln(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot x\ln(x)}=1$

מכיוון ש: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$ וגם $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$

2. תהי f פונקציה גזירה פעמיים בסביבה של x. הוכח כי:

(א) לפי לופיטל: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f^{'}(x+h)+f^{'}(x-h)}{2}=f'(x)$ (גזרנו לפי h)

(ב) לפי לופיטל וסעיף א: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f^{'}(x+h)-f^{'}(x-h)}{2h}=f''(x)$

3. מצא את פיתוח טיילור סביב הראשית של הפקונציות הבאות:

(א) בכיתה ראינו ש: $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...$

ולכן: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$

(ב) $f(x)=(1+x)^\alpha \Leftarrow f^{'}(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

ובאינדוקציה נקבל: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

כלומר: $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

ולכן: $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

(ג) $\sinh^{'}(x)=\cosh(x)$ וגם $\cosh^{'}(x)=\sinh(x)$

לכן: $\sinh^{(2n)}(0)=\sinh(0)=0$ וגם $\sinh^{(2n-1)}(0)=\cosh(0)=1$

לכן: $\sinh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$

(ד) באותו אופן: $\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$

4. חשב בעזרת טורי טיילור את הביטויים הבאים עד כדי שגיאה של $\epsilon=10^{-3}$:

נמצא קירוב עבור $\sqrt{e}$. ניתן להשתמש בטור טיילור עבור $\sqrt{1+x}$ (ולקרב את הערך ב- $x=e-1$) או בטור טיילור עבור e^x (ולקרב את הערך ב- $x=\frac{1}{2}$).

נשתמש בטור של e^x. כפי שראינו: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$.

נעריך את השגיאה: $|R_n(\frac{1}{2})| \leq \frac{(\frac{1}{2}-0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sup_{\zeta\in[0,\frac{1}{2}]} |(e^x)^{(n+1)}(\zeta)| = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \sup_{\zeta\in[0,\frac{1}{2}]} |e^{\zeta}| = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}(n+1)!}$

בכדי להבטיח שיתקיים $|R_n(\frac{1}{2})| \leq \epsilon$ נדרוש שיתקיים: $\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \epsilon = 10^{-3}$. לשם כך אפשר לבחור $n = 4$.

לכן, הקירוב שלנו נתון ע"י: $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} \approx 1.64844$. בדיקה מראה שהשגיאה ה"אמיתית" היא: $2.84 \cdot 10^{-4}$.

חשב בעזרת קירוב טיילור את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+x^3r(x))-x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2r(x)}{\sin x} = 0$

מכיוון ש: $\sin(x) = x + x^3r(x)$ כאשר $r(x)$ פונקציה המקיימת: $\lim_{x\to 0} r(x) = L$ (גבול סופי כלשהו)

(ב) נפתח לטור טיילור: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2s(x)$, $\ln(1+x) = x + x\cdot r(x)$, כאשר $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$ וגם $\lim_{x\to 0} r(x) = 0$,

נציב ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+x^2s(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+x^2s(x)+(-\frac{x^2}{2}+x^2s(x))r(-\frac{x^2}{2}+x^2s(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}+s(x)+(-\frac{1}{2}+s(x))r(-\frac{x^2}{2}+x^2s(x)) = -\frac{1}{2}$$

(ג) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{[\ln(1+x)]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2+x^3s(x))-1}{[x+xr(x)]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3s(x)}{x^2(1+r(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+xs(x)}{(1+r(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+xs(x)}{(1+r(x))^2} = 1$

5. נניח כי $f(x)$ בעלת פיתוח טיילור בכל $\mathbb{R}$ ונניח שקיים קטע פתוח $\mathbb{R} \supset I \neq \emptyset$ כך ש $f(x) = 0$ לכל $x \in I$ הוכח ש $f(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הכוונה כאן היא שטור הטיילור של $f(x)$ מתכנסת לפונקציה בכל $\mathbb{R}$.

בקטע I, הפונקציה היא אפס זהותית ולכן כל הנגזרות מתאפסות: $\forall x \in I\, \forall n \in \mathbb{N}\ \ f^{(n)}(x) = 0$

כעת, נבחר נקודה $x_0 \in I$ ונפתח לטור טיילור סביב x_0 ונקבל: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = 0$

6. נניח כי $f(x)$ בעלת פיתוח טיילור בכל $\mathbb{R}$ וידוע ש $|f^{(n)}(0)| \leq M$ לכל $n \geq 0$ כאשר M קבוע כלשהוא. הראה כי $|f(x)| \leq Me^{|x|}$.

נפתח לטור טיילור סביב 0 ונקבל: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

לכן: $|f(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}|x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}|x|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = Me^{|x|}$